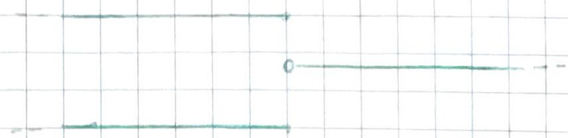
Oss: Non è detto che quozienti di T2 siano T2

ex: $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$



$(x,0) \sim (y,1) \iff x = y > 0$

In $X/_\sim$ i punti $(0,0)$ e $(0,1)$ non hanno intorni disgiunti

Studiamo quando quozienti di T2 sono T2.

TEO: X cmpt T2 e $f: X \to Y$ identificazione.
Sono fatti equivalenti:

1. Y T2
2. $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ chiuso in $X \times X$
3. f chiusa

Dim: 1 $\Rightarrow$ 2

Y T2 $\iff \Delta_Y \subseteq Y \times Y$ chiuso $\Rightarrow K = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$
e poiché $f \times f$ continua, è chiuso in $X \times X$

2 $\Rightarrow$ 3

$C \subseteq X$ chiuso: $f(C)$ è chiuso $\overset{\text{def di identificazione}}{\iff} f^{-1}(f(C))$ chiuso saturo

X compatto: $p_1, p_2 : X \times X \to X$ sono CHIUSE

- $\underbrace{K}_{\text{chiuso}} \cap \underbrace{p_2^{-1}(C)}_{\text{è chiuso}} = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2) \text{ e } x_2 \in C\}$ chiuso
- $p_1(\overset{\text{chiuso}}{K \cap p_2^{-1}(C)}) = \{x_1 : f^{-1}(x_1) \cap C \neq \emptyset\}$
$= \{x : f(x) \in f(C)\} = f^{-1}(f(C))$ chiuso

3 $\Rightarrow$ 1

Dimostriamo questo lemma

Lemma [Teo Wallace] X, Y topologici: $A \subseteq X$ cmpt, $B \subseteq Y$ cmpt e $A \times B \subseteq W$ aperto in $X \times Y$

Allora $\exists \boxed{\begin{matrix} U \subseteq X \\ V \subseteq Y \end{matrix}}$ aperti tali che $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$

Dim: Sia $W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ (ric. aperto)

fisso $a \in A$: $\{a\} \times B \approx B$ compatto, $\{a\} \times B \subseteq \bigcup U_i \times V_i$

$\to \exists N : \{a\} \times B \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i \times V_i$ e $\begin{cases} \text{wlog } a \in \bigcap_{i=1}^{N} U_i = U_a \\ \text{sia } V_a = \bigcup_{i=1}^{N} V_i \end{cases}$ $: U_a \times V_a \subseteq W$

- $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a \Rightarrow A$ cmpt $\exists M : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} = U$
- $B \subseteq V_a \ \forall a \in A \to B \subseteq \bigcap_{a \in A} V_a \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} = V$

$U \times V = \bigcup U_{a_i} \times \bigcap V_{a_i} \subseteq \bigcup (U_{a_i} \times \bigcap V_{a_i}) \subseteq \bigcup (U_{a_i} \times V_{a_i}) = W$

$\to$ $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$

Dimostriamo allora che f chiuso $\Rightarrow$ Y T2

Siano $a \neq b \in Y$. $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b)$ sono COMPATTI DISGIUNTI in X

- f surg: $\exists \tilde{a} : f(\tilde{a}) = a$
- X T2, f chiuso
  $f(\tilde{a}) = a$ è chiuso in Y
- $f^{-1}(a)$ chiuso in X compatto

Allora:

$$\underbrace{f^{-1}(a)}_{A} \times \overbrace{f^{-1}(b)}^{B} \subseteq \overbrace{\underbrace{X \times X \setminus \Delta_X}_{\text{aperto in } X}}^{W}$$

Per Wallace $\exists$ $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ tali che

$$f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \subseteq U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta_X$$

ovvero $f^{-1}(a) \subseteq U$, $f^{-1}(b) \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$

Allora $U' = Y \setminus f(X \setminus U)$ aperto in Y
$V' = Y \setminus f(X \setminus V)$ aperto in Y (f chiuso)

e $f^{-1}(a) \in U \Rightarrow a \in U'$ e similmente $b \in V'$

e $U' \cap V' = Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) = \emptyset$

Consideriamo azioni di un gruppo G su sp topologico X.
- omomorf di gruppi $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$, $g \mapsto \varphi_g$

Sia $g \in G$: $\varphi_g(x)$ si scrive anche $g \cdot x$

Ogni azione induce una rel d'equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in Gy = \mathrm{Orb}(y) \longrightarrow X/G := X/\sim = Y$$

Ora Y è T2 $\Leftrightarrow$ $\forall y_1 \neq y_2 \in Y$ $\exists$ U, V aperti in Y : $U \cap V = \emptyset$
$y_1 \in V$ e $y_2 \in V$

e se Y è immagine di una id $f : X \to Y$ equivale a dire
$\forall y_1 \neq y_2 \in Y$ $\exists$ U e V $\boxed{\text{aperti saturi}}$ disgiunti in X t.c.

$$f^{-1}(y_1) \subset U \quad , \quad f^{-1}(y_2) \subset V$$

Se $Y = X/G$: un insieme saturo è G-stabile

Ex: $GL(n,\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^n / GL(n,\mathbb{R}) = \{[0], [e_1]\}$ Spazio di Sierpinsky

con topologia
$\{[0]\}$ chiuso ($f^{-1}(0) = 0$)
$\{[e_1]\}$ aperto ($f^{-1}(e_1) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$\rightarrow$ Y non è T2.

Prop: $G \circlearrowright X$ con (X un T2) (forse non serve): allora

X/G è T2 $\iff$ $K \subset X \times X$ chiuso

$K = \{(x, g\cdot x) \mid g \in G\}$ coppie di el. nella stessa orbita

Dim: pxp: $X \times X \to Y \times Y$ è id. aperta (prodotto di identificazioni aperte) $\to$ considero su $Y \times Y$ la top quoziente di $X \times X$

quindi $C \subset Y \times Y$ chiuso $\iff$ $f^{-1}(C) \subset X \times X$ chiuso

Osservo che $f^{-1}(\Delta_Y) = K$: Y T2 $\iff$ Δ_Y chiuso $\iff$ K chiuso

Ex: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono T2 perché quoziento per il gruppo delle omotetie $\approx \mathbb{R}^*$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ T2 $\iff$ $K = \{(v,w) \mid v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ proporzionali$\}$ chiuso

Oss: $K' = \{(v,w) : \exists \lambda \in \mathbb{R} \; v = \lambda w\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = M(2, n+1)$ è chiuso (definito dall'annullarsi dei minori 2×2)

quindi $K = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cap K'$ è chiuso

Teo: Sia X un T2 con la seguente proprietà:

$$\boxed{\forall x, y \in X \text{ esistono } x \in U,\ y \in V \text{ intorni tali che } g(U) \cap V = \emptyset \text{ tranne per al più un \# finito di } g \in G}$$

$\Rightarrow X/G$ è T2.

Ex: •) G finito
•) $\mathbb{Z}^n \circlearrowright \mathbb{R}^n$ per traslazioni: infatti $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1 \; \forall i\}$ aperto di $\mathbb{R}^n$
$\to g(U) \cap U$ in un # finito di g (*)

perché $g(U) = U + a$ e voglio che $\|a\| < 1$

Oss: $\{U + a\}$ ricopre $\mathbb{R}^n$ ($a \in \mathbb{Z}^n$) ⚠ $\to$ $\forall x, y$: $x \in U + a$ $y \in U + b$
$g(U+a) \cap (U+b)$
$= (U + a + c) \cap U + b$
$= (U + a + c - b) \cap U$ (*)

Dim (TEO): Siano x, y: $orb(x) \neq orb(y)$.
Cerco due aperti disgiunti saturi $x \in A$, $y \in B$

[Ip] $\to$ $x \in U$, $y \in V$ e vale $\exists g_1, \dots, g_n \in G$: $g_i(U) \cap V \neq \emptyset$

Poiché X è T2, $\forall i$ separo $g_i(x)$ e y: intorni disgiunti $U_i \ni g_i(x)$, $V_i \ni y$

$\to$ $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i)$ intorno di x
$V' = V \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ intorno di y
$\Big\}$ $\boxed{\text{SONO DISGIUNTI}}$

Claim $\forall g \in G$: $g(U') \cap V' = \emptyset$
- $g(U) \cap V = \emptyset \to$ ovvio
- $g(U) \cap V \neq \emptyset$: $g = g_i \Rightarrow g(U') \cap V' \subset U_i \cap V_i = \emptyset$

Finalmente definisco $A = \bigcup_{g\in G} g(U')$ e $B = \bigcup_{g\in G} g(V')$

① sono SATURI (g-stabili per costruzione)

② sono DISGIUNTI:

$$A\cap B = \bigcup_{g,h\in G} \left(g(U')\cap h(V')\right) \text{ ma}$$

$$g(U')\cap h(V') = h\left(h^{-1}g(U')\cap V'\right) \overset{\text{Claim}}{=} \emptyset$$

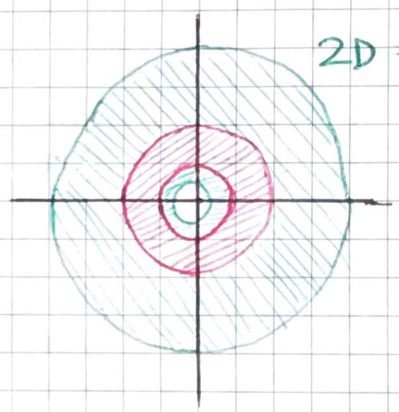
Def: $G \circlearrowright X$ un DOMINIO FONDAMENTALE per l'azione è un chiuso D tale che $D^\circ \neq \emptyset$ e

1. D interseca tutte le orbite di G $\leftrightarrow$ $X = \bigcup_{g\in G} g(D)$
2. $\mathrm{Int}(g(D)\cap h(D)) = \emptyset \quad \forall g\neq h$ cioè $g(D)\cap h(D) = g(\partial D)\cap h(\partial D)$

Ex: *) $\mathbb{Z}^n \circlearrowright \mathbb{R}^n$ per traslazione: $[0,1]^n$ è un dominio fond

*) $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$: $n\cdot x = 2^n x$

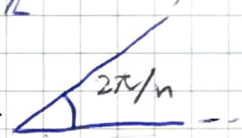
$\Rightarrow$ $D = \{z\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \mid 1\le \|z\|\le 2\}$



2D = 1·D

*) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ per rotazione: $\frac{2\pi k}{n}$

$\Rightarrow$ D =



Se D è un dominio fondamentale posso considerare il quoziente D/G considerando l'azione indotta

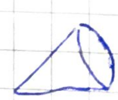
$$d\sim d' \iff orb(d) = orb(d')$$

(Per domani): dimostriamo che

*) $\mathbb{Z}^n \circlearrowright \mathbb{R}^n$ trasl: $[0,1]^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$

*) $\mathbb{Z}\circlearrowright \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ con $n\cdot x = 2^n x$: $D/\mathbb{Z} \approx S^1\times S^1$

*) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ per rotazione: $D/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong$



cono

G agisce su X tramite omeomorfismo.

$D \subset X$ è un dominio fondamentale per l'azione se è chiuso e valgono che $D^\circ \neq \emptyset$ e

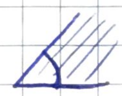
$$\left.\begin{array}{l} - \bigcup_{g \in G} gD = X \\ - \mathrm{Int}(gD \cap hD) = \emptyset \quad \forall g \neq h \end{array}\right\} \quad D/G$$

Ex: + $\mathbb{Z}^n$ agisce su $\mathbb{R}^n$ per trasl

$\Rightarrow [0,1]^n$ è un dominio fondamentale e $[0,1]^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$

+ $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con $n \cdot v = 2^n v$

$\Rightarrow D = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|v\| \leq 2 \}$ è un d. fond e $D/\mathbb{Z} \cong S^1 \times S^1$

+ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}^2$ ruotando di $\frac{2\pi i}{n}$: D =  di ang $\frac{2\pi}{n}$ dominio fond e $D/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \approx$  cono

Supponiamo che X/G sia Hausdorff. Voglio cfr D/G e X/G

C'è un'applicazione naturale

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook, "\text{chiusa}"] \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, "\text{continua}"] & X \arrow[d, "\substack{id \\ \text{aperta}} = p"] \\ D/G \arrow[r, "f"'] & X/G \end{tikzcd}$$

uso la prop fond della identificazione

non so se è ap o chiusa

$\rightarrow$ f è continua e bigettiva (iniettiva per def. surgettiva per ①)

1) Se D compatto e X/G è T2: f omeomorfismo (caso 1, 2)

2) Se p è chiusa (es G finito): f omeomorfismo

Nell'esempio 3. vediamo $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \approx \mathbb{R}^2$

Se trovo $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua e tale che le fibre di p sono le $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ orbite

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\substack{id \\ \text{aperta} \\ \text{e chiusa}}"'] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

f continua e bigettiva

$\rightarrow$ Se p aperta o chiusa: f omeomorfismo

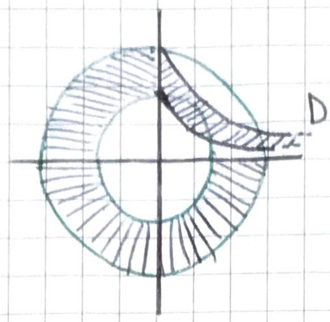
uso $\underset{z}{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \underset{z^n}{\mathbb{C}}$ costante sulle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ orbite

p polinomio → proprio → chiuso ↗ ok

n 1° rad

Guardo l'esempio 2. <u>In generale</u> $D/G \not\approx X/G$.

Considero D



- D è, per l'azione, un dominio fondamentale
- D/G non è compatto

$\rightarrow D/G \not\approx S^1 \times S^1 \approx X/G$

Ex. Sia $\mathbb{R}^2$ con l'azione di $\mathbb{Z}$ $\quad n \cdot v = 2^n v$ <u>NON</u> è Hausdorff

<u>Def</u>: Γ ricoprimento di X è localmente finito se $\forall x \in X$ esiste un intorno U tale che

$$U \cap C \neq \emptyset \text{ solo per un \# finito di elementi } C \in \Gamma$$

Consideriamo, dato D dominio fondamentale per X/G, il ricoprimento $\{gD\}_{g \in G}$

<u>Oss</u>: nel controesempio 1 <u>non</u> è localmente finito (considerare i punti sul semiasse delle ascisse)

<u>TEO</u> Sia D un dominio fondamentale per l'azione di X/G e supponiamo che $\{gD\}_{g \in G}$ sia un ricoprimento loc. finito.

$$\Rightarrow X/G \approx D/G$$

<u>Dim</u>: Considero

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "q"] \\ D/G \arrow[r, "f"] & X/G \end{tikzcd}$$

Dimostro che f è aperta

Sia $A \subset D/G$ aperta $\Leftrightarrow p^{-1}(A) = D \cap B$ con B ap in X

Allora $f(A)$ aperto $\Leftrightarrow q^{-1}(f(A))$ aperto in X

Dunque:

- $q^{-1}(f(A)) = \bigcup_{g \in G} g(D \cap B) = V$
- f aperta se e solo se $\boxed{V \text{ aperto in } X}$

Sia allora $x \in V$, voglio trovare $U \in \mathrm{Int}(x) : U \subset V$

Posso assumere che $x \in D \cap B$ (a meno di trasformare con g)

Osservo che $\{gD\}_{g \in G}$ loc finito $\to \exists\, U \in \mathcal{I}nt(x)$ t.c.

$$U \cap gD \neq \emptyset \text{ per un \# finito di } g \in G.$$

Siano questi g, $g_1, \dots, g_n$.

$\boxed{\text{Posso assumere che } x \in g_i D \ \forall i = 1, \dots, n.}$

$\left\{ \text{Se } x \notin g_i D \longrightarrow U \setminus g_i D \in \mathcal{I}nt(x) \text{ : sostituisco } U \text{ con } U \setminus g_i D \right\}$

Ho un # finito di g_i, rimuovo tutti quelli con $x \notin g_i D$

Ma allora $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i D$ e $x \in g_i D \ \forall i \Rightarrow g_i^{-1} x \in D$

ma quindi $p(g_i^{-1}x) = p(x) \Rightarrow g_i^{-1} x \in D \cap B \to x \in g_i B$

Allora posso considerare $\boxed{U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i B}$

Dimostro che $U' \subset V$.

Sia $y \in U' \Rightarrow \begin{cases} y \in U \subset g_i D & \text{per un qualche } i \\ y \in g_i B \end{cases} \Rightarrow y \in g_i (D \cap B) \subset V$ ok

- G agisce tramite omeomorfismo su $X \iff G \xrightarrow{\Phi} \text{Omeo}(X)$ om di grp.

Equivalentemente: $\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\psi} & X \\ (g, x) & & g \cdot x = \Phi_g(x) \end{array}$

<u>Oss</u>: ψ è continua se doto G della topologia discreta

$$\psi^{-1}(U) = \{(g, x) : g \cdot x \in U\} = \bigcup \{g\} \times g^{-1} U$$
che è aperto in $G \times X$

D'altra parte se ψ continua con (G top discreta) $\longrightarrow G \circlearrowright X$.

Detto meglio, stiamo parlando di AZIONI CONTINUE DI GRUPPI DISCRETI

Voglio studiare delle proprietà delle azioni continue di gruppi discreti.

<u>Def</u>: Dati $A, B \subset X$ sia TRASPORTATORE di A in B

$$(A|B)_G = \{ g \in G : gA \cap B \neq \emptyset \}$$

T1) $\Phi : G \times X \longrightarrow X \times X$ è propria (azione propria)
$(g, x) \qquad\qquad (x, g\cdot x)$

T2) $\forall K \subset X$ compatto, $(K|K)_G$ è finito

T3) $\forall x, y \in X \ \exists x \in U, y \in V$ intorni t.c. $(U|V)_G$ è finito (azioni vaganti)

T4) $\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{I}nt(x)$ t.c. $(U|U)_G$ è finito

T5) $\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{I}nt(x)$ t.c. $(U|U)_G = \{id\}$ [=> libera]

Studiamo i legami fra queste proprietà.

Def: un'azione è libera se $\forall x \in X, g \in G$ $g\cdot x = x \Leftrightarrow g = e$.

- TEO 1 Se l'azione è libera e X di Hausdorff $\Rightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 5
- TEO 2 Se X è Hausdorff loc compatto $\Rightarrow$ 1 $\underset{T2}{\Leftrightarrow}$ 2 $\overset{loc\ cmpt}{\Leftrightarrow}$ 3
- TEO 3 Supponiamo che valga 4: allora vale 3 $\Leftrightarrow$ X/G è Hausdorff (x' X è T2)

Oss (•) (3 => 4): Sia $x \in X$, cerco U t.c. $(U|U)_G$ finito.
Considero $y = x$ in 3: $\exists U', V' \in \mathcal{I}nt(x)$ t.c. $(U'|V')$ finito

$\rightarrow U = V' \cap U'$ intorno di x e $g(U' \cap V') \cap (U' \cap V') \subset gU' \cap V'$

$\rightarrow (U|U)$ finito.

Dim (TEO 2): Dimostro le equivalenze.

(1 => 2): Sia $K \subset X \Rightarrow K \times K \subset X \times X$ compatto
ma allora $\Phi^{-1}(K \times K) \subset G \times X$ compatto

Sia $p: G \times X \longrightarrow G$ proiezione: $p(\Phi^{-1}(G \times X))$ è un compatto di G

$\rightarrow p(\Phi^{-1}(G \times X))$ è finito

$$\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\} = (K|K)_G$$

(2 => 3) loc cmpt: Siano $x, y \in X$ trovo $K_1 \in \mathcal{I}nt(x)$, $K_2 \in \mathcal{I}nt(y)$ compatti
$\Rightarrow K_1 \cup K_2$ cmpt $\rightarrow (K_1 \cup K_2 | K_1 \cup K_2)$ finito

$\Rightarrow g(K_1) \cap K_2 \subseteq g(K_1 \cup K_2) \cap (K_1 \cup K_2)$

quindi anche $(K_1|K_2)_G$ è finito

(3 ⇒ 1) Sia $L \subset X \times X$ compatto $\overset{T2}{\Longrightarrow}$ chiuso
T2
quindi $\Phi^{-1}(L)$ chiuso in $G \times X$

|| Voglio far vedere $\exists\, K$ cmpt in X e $G_0 \subset G$ finito tale che $\Phi^{-1}(L) \subset G_0 \times K$ ($\rightarrow$ chiuso in cmpt $\Rightarrow$ cmpt)

- Siano $p_1, p_2 : X \times X \to X$; e $p_1(L) = K$ compatto di X
- Sia $(x,y) \in X \times X$, $\exists\, U_x \in \mathcal{I}nt(x)$, $V_y \in \mathcal{I}nt(y)$: $(U_x | V_y)$ è finito.
aperto aperto

Osserviamo che

$$L \subset \bigcup_{(x,y) \in L} U_x \times V_y \xrightarrow[\text{e L cmpt}]{\text{ric aperto}} L \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i$$

Poniamo $G_i = (U_i | V_i)$ finito per ip e $G_0 = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ } finito: unione fin. di insiemi finiti

Dimostriamo che $\boxed{\Phi^{-1}(L) \subset G_0 \times K}$

$\Phi^{-1}(L) = \{ (g,x) : (x, g\cdot x) \in L \}$

Quindi $(g,x) \in \Phi^{-1}(L) \rightarrow (x, g\cdot x) \in L$ $\nearrow x \in K$, $\searrow g \in G_0$ (1)

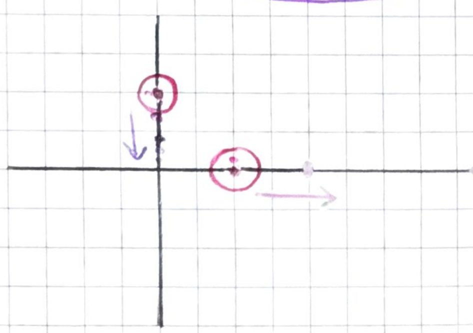
(1): $(x, g\cdot x) \in L \rightarrow \exists\, i : (x, g\cdot x) \in U_i \times V_i$

$\Rightarrow g \in G_i \longrightarrow g \in G_0$.

Ex: In generale 4) $\not\Rightarrow$ 3) (~~Hp~~ per X/G non T2). vagante NON NECESS. proprio

Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e

$G \circlearrowright X : n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n x \\ 2^{-n} y \end{pmatrix}$



•) L'azione soddisfa 4

•) L'azione non soddisfa 3:

$\exists\, x, y : \forall\, U \in \mathcal{I}nt(x), V \in \mathcal{I}nt(y)$: $(U|V)_G$ non finito

Consideriamo $(0,1)$ e $(1,0)$: $gU \cap V \neq \emptyset$ per ∞ $g \in G$
$\uparrow U$ $\uparrow V$

$\exists\, n$: $(2^{-n}, 1) \in U$ def : $n \cdot (2^{-n}, 1) = (1, 2^{-n})$ def.
$(1, 2^{-n}) \in V$ def $\rightarrow gU \cap V \neq \emptyset$

Oss: X/G non T2 : $(0,1) \in U$, $(1,0) \in V$ intorni G-stabili
$\Rightarrow U \cap V = gU \cap V \neq \emptyset$ $\forall g$.

* Ancora azioni di gruppi 12/03

$G \longrightarrow \mathrm{Omeo}(X)$ omomorfismo di gruppi

Abbiamo definito 3 tipi di azioni:

P1. $\boxed{\begin{array}{ccc} \Phi : G\times X & \longrightarrow & X\times X \\ (g,x) & & (x, g\cdot x) \end{array}}$ con G dotato della top. discreta

è una applicazione propria

P2. $\forall K \subset X$ compatto: $gK \cap K \neq \emptyset$ soltanto per un numero finito di $g \in G$

P3. $\forall x, y \in K$ $\exists$ intorni $U \ni x$, $V \ni y$ tali che $gU \cap V \neq \emptyset$ per al più un # finito di $g\in G$

TEO2: X è T2 e loc compatto: $1 \Longleftrightarrow 2 \overset{\text{loc cmpt}}{\Longleftrightarrow} 3 \overset{T2}{\longrightarrow} 1$

↑ in questo caso l'azione è detta AZIONE PROPRIA

Prop 2.1 X è T2: $1 \Leftrightarrow 2$

Dim: - Abbiamo già visto $1 \Rightarrow 2$.
- Mostriamo $2 \Rightarrow 1$.

Sia $L \subset X\times X$ compatto: $X\times X$ cmpt $\rightarrow$ L chiuso

$$\begin{tikzcd} & X\times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Chiamo $K = p_1(L) \cup p_2(L) \subset X$ compatto $\rightarrow L \subset K\times K$

Dunque basta vedere che $\Phi^{-1}(K\times K)$ è compatto.

Ora $\Phi^{-1}(K\times K) = \{(g,x) : x\in K, g\cdot x \in K\}$
$= \{(g,x) : x \in K \cap g^{-1}(K)\}$

Sia $p_G : X\times G \longrightarrow G$ la proiezione, allora

$G_0 = p_G(\Phi^{-1}(K\times K)) = \{g\in G : K\cap g^{-1}(K) = \emptyset\}$
$= \{g \in G : gK \cap K = \emptyset\}$
sottoinsieme finito di G

$\rightarrow \Phi^{-1}(\underbrace{K\times K}_{\text{chiuso}}) \subset G_0 \times K$ compatto

quindi $\Phi^{-1}(K\times K)$ è compatto
$\cup\!|$
$\Phi^{-1}(L)$] chiuso (è chiuso)

$\Big\}\ \Phi^{-1}(L)$ compatto

Inoltre abbiamo visto altre 2 proprietà:

V : $\forall x \in X \ \exists U$ intorno di x : $(U|U)_G$ è finito ← vagante

VL : $\forall x \in X \ \exists U$ intorno di x : $(U|U)_G = \{id\}$ ← vagante e libera

Oss: $P3 \Rightarrow V$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sia } x \in X \text{ per } P_3 \ \exists U, V \in Int(x) \\ \text{tali che } (U|V)_G \text{ è finito.} \\ \text{Ma allora } (U \cap V | U \cap V)_G \text{ è finito} \end{array} \right.$

Teo 1 Se X è Hausdorff : (VL) $\Leftrightarrow$ (V) e azione libera

Dim: È chiaro $\boxed{\Rightarrow}$

- Banalmente $\exists U : (U|U)_G = \{id\} \rightarrow (U|U)_G$ finito
- Se $\exists g : gx = x \Rightarrow g \in (U|U)_G = \{id\} \rightarrow g = id$

Vediamo $\boxed{\Leftarrow}$

Consideriamo $x \in X$ e prendiamo $x \in U$ tale che $(U|U)_G$ è finito.

T2 Posso separare x dai suoi traslati

So che l'azione del gruppo è libera

Sia $id \neq g \in G$: $gU \cap U \neq \emptyset$ ne esistono finiti $\rightarrow g_1, \dots, g_n$

$\Rightarrow \boxed{g_i x \neq x} \ \forall i \leq n$

Quindi $\exists U_i \ni x, V_i \ni g_i x$ intorni disgiunti

Consideriamo $\boxed{U' = U \cap \left(\bigcap_i U_i \right) \cap \left(\bigcap g_i^{-1}(V_i) \right)}$ intorno di x

Vediamo che $gU' \cap U' = \emptyset \quad \forall g \neq e$

1. Se $gU \cap U = \emptyset \rightarrow gU' \cap U' \subset gU \cap U = \emptyset$
2. Se $g = g_i$ per qualche i:

$\rightarrow g_i U' \cap U' \subset V_i \cap U_i = \emptyset$ per costruzione

Quindi $(U'|U')_G$

* Azione PROPRIAMENTE DISCONTINUA.

Se vale la proprietà (VL) l'azione si dice propriamente discontinua.

Oss: questa definizione si riferisce solo al fatto che G abbia la top discreta [l'azione è sempre continua].

Teo 3: Sia $G \to \mathrm{Omeo}(X)$ un omomorfismo di gruppi e supponiamo che l'azione sia vagante e X sia T2.

Allora: l'azione verifica P3 $\iff X/G$ Hausdorff.

Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ già visto.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo X/G sia di Hausdorff.

Siano $x, y \in X$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Supponiamo $Gx \neq Gy$. Allora

X/G T2 $\Rightarrow \exists\, \underset{x}{U} , \underset{y}{V}$ aperti saturi t.c. $U \cap V = \emptyset$

G-stabili

$\Rightarrow gU \cap V = U \cap V = \emptyset \quad \forall g \in G.$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supponiamo $Gx = Gy$. Assumiamo $y = hx$

AZIONE VAGANTE } $\exists\, x \in U$ intorno t.c. $gU \cap V \neq \emptyset$ per finiti elementi di G.

Considero $V = hU$: V intorno di y.

Allora $gU \cap V = gU \cap hU = h(h^{-1}gU \cap U)$

quindi è $\neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in G$

Def 2: $G \to \mathrm{Omeo}(X)$ azione di gruppo.
Estendiamo la def di DOMINIO FONDAMENTALE

$D \subset X$ tale che:

① $D^\circ \neq \emptyset$

② $\forall g \neq h \in G$: $gD \cap hD \neq \emptyset$

③ $\{gD\}_{g \in G}$ ric. localmente finito di X

Prop Se esiste un ~~ricopr.~~ dominio fondamentale D allora l'azione verifica P2.

Dim: $\forall x \in X$: $\exists U_x \ni x$: $U_x \cap h D \neq \emptyset$ solo per finiti $h \in G$. } $\{gD\}$ loc finito

compatto in X $\to K \subset \bigcup_{x \in X} U_x \to \exists x_1, \dots, x_k \in K$ t.c.

$K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \subset g_1 D \cup \dots \cup g_m D$ } $\{gD\}$ è ... $U_x \subset \bigcup g_i D$

Vediamo che $gK \cap K$ per un # finito di $G \ni g$.

Sia $x \in K$ e $g \in G$: $gx \in K \to gx \in g_i D$ per un qualche i

ovvero $x \in g^{-1} g_i D \to g^{-1} g_i D \cap K \neq \emptyset$

ma allora $\exists j$: $g^{-1} g_i D = g_j D$

$\to$ ma quindi vale anche $g^{-1} g_i D^\circ = g_j D^\circ$ e D° fondamentale

$\hookrightarrow g^{-1} g_i = g_j \Rightarrow g = g_i^{-1} g_j$ e ce ne sono un # fin.

Ex (IMPORTANTE) [azione propria]

$G = SL(2, \mathbb{Z})$ agisca su $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$

in modo che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \dfrac{az+b}{cz+d}$

- Vediamo che è ben definito:

$$\boxed{Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{Im(z)}{\|cz+d\|^2}}$$

Infatti $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{\|cz+d\|^2}$ $= ac\,z^2$

Im $\hookrightarrow Im(\dots) = \dfrac{1}{\|cz+d\|^2}\left(Im(z) \cdot (ad - bc)\right)$

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ ip

Inoltre $cz + d = 0 \iff$ $cx + d = 0 \to d = 0$, $cy = 0 \to c = 0$ } ass.

$z = x + iy$

- (Esercizio) Verificare che $SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ definisca un omomorfismo di gruppi di $SL(2, \mathbb{Z}) \to Omeo(\mathbb{H})$

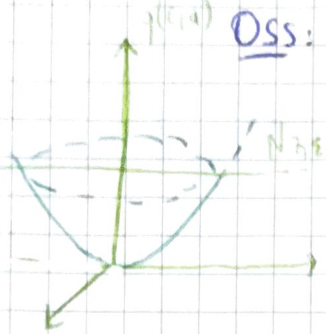
- Verifichiamo che l'azione è propria

(P2) $\forall K$ compatto in $\mathbb{H}$ vale $gK \cap K \neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Sia K un compatto in $\mathbb{H}$ $\to$ K cmpt in $\mathbb{C}$ ovvero K chiuso e lim in $\mathbb{C}$

$\{$Esiste un $\varepsilon > 0$, t.c. $\mathrm{Im}(z) > \varepsilon \quad \forall z \in K\}$

Sia $z \in K$, considero $q(c,d) = |cz+d|^2$ $\quad (q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$



Oss: q definisce una forma quadratica definita positiva $\}$ IPERBOLOIDE

Dunque se $q(c,d) > N_{z,\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ c,d sono fuori da un disco $= B_0(R(z))$

Ovvero $\forall z$ fissato, esiste $R(z)$ tale che

$$\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} < \varepsilon \implies |c|, |d| < R(z)$$

Allora $R: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ è una f continua

$\Rightarrow$ esiste $R_K = \max\limits_{z \in K} R(z)$

- Inoltre sia $z \in K$ e $g \in SL(2,\mathbb{Z})$ t.c. $gz \in K$

(c,d) $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(gz) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > \varepsilon$ perché $gz \in K$

e quindi $|c|, |d| < R(z)$ $\}$ c,d hanno un # finito di possibilità

(a,b) Vediamo che la prima riga ha un # finito di possibilità.

Considero $\boxed{g_1, g_2} \in \mathbb{Z}(2,\mathbb{Z})$ tali che $g_i K \cap K \neq \emptyset$

con la stessa seconda riga

$\Rightarrow$ $g_0 = g_2 g_1^{-1}$ ha un numero finito di possibilità

Allora $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = g_2 \to g_0 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$

quindi $g_0 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b_1 \\ c & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Det}(g_2) & * \\ 0 & \mathrm{Det}(g_1) \end{pmatrix}$

quindi

$g_0 z = z + n$ $\quad \Big\}$ $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

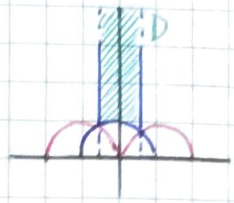
Ora $g_2 K \cap K = (g \circ g_1 K) \cap K =$

$= (g_1 K + n) \cap K$ ← K limitato → $|n|$ limitato perché l'$\cap$ sia non vuoto

Dato g_1 ha un # finito di g_2 con la stessa seconda riga.

Allora il quoziente $\mathbb{H}/_{SL(2,\mathbb{Z})}$ è T2.

Com'è fatto?



① Considero $D = \{z \in \mathbb{H} \mid |Re(z)| \leq 1/2,\ |z| > 1\}$

② $\mathbb{H}/_{SL(2,\mathbb{Z})} \approx D/_{\sim} \approx \mathbb{C}$

12/05

$f: X \to Y$ propria e Y Hausdorff loc. compatto.
$Z \subset X$ chiuso e discreto $\Rightarrow$ $f(Z)$ chiuso e discreto

Oss: f propria e Y Hausdorff e loc. compatto $\to$ f chiusa.

Quindi Z chiuso $\Rightarrow$ $f(Z)$ chiuso.

Dimostriamo che $f(Z)$ è discreto $\Leftrightarrow$ $\forall f(z_0) \in f(Z)$ $\exists$ U intorno di $f(z_0)$ con $f(Z) \cap U = \{f(z_0)\}$

Sia $z_0 \in Z$ e sia $U \ni f(z_0)$ un intorno compatto.
$\to$ $f^{-1}(U)$ è compatto perché f è propria.

Allora $f^{-1}(U) \cap Z$ chiuso in un compatto $\to$ compatto, discreto $(\subset Z)$ e discreto } FINITO

$\Rightarrow$ $f(f^{-1}(U) \cap Z) = U \cap f(Z)$ è finito

Quindi $U_0 = U \setminus (f(Z) - f(z_0))$ è ancora intorno di $f(z_0)$
(Ho tolto un # finito di intorni) $\to$ $U_0 \cap f(Z) = \{f(z_0)\}$.

Cor sia $G \to \text{Omeo}(X)$ un'azione propria [e X Hausdorff loc. compt]
$\Rightarrow$ $\forall x \in X$ $Gx \subset X$ chiuso e discreto.

Dim: $G \circlearrowright X$ proprio: $\Phi: G \times X \longrightarrow X \times X$ propria.

Fisso $x \in X$: $\Phi(\underline{G \times \{x\}}) = \{x\} \times Gx$ chiuso e discreto in $X \times X$

chiuso e discreto

$$\downarrow p_2$$

Gx chiuso e discreto in X

Prop: Sia $G \to \mathrm{Omeo}(X)$ un'azione vagante e X Hausdorff. Allora $\forall x \in X$ vale Gx chiuso e discreto in X.

Dim: $G \circlearrowright X$ vagante:

$\forall x \in X \ \exists\, U \in \mathrm{Int}(x)$ t.c. $U \cap gU \neq \emptyset$ solo per finiti $G \ni g$.

Oss: dato U come sopra $\Longrightarrow U \cap Gx$ è finito $\forall x \in X$

- Se $U \cap Gx = \emptyset \to$ ok
- Altrimenti, a meno di comporre con un omeomorfismo li, posso supporre $x \in U$

Se $gx \in U \Rightarrow x \in \underset{\neq \emptyset}{g^{-1}U \cap U} \to$ ho finite possibilità per g.

<u>Vediamo che Gx è discreto.</u>

Sia $U \subset \mathrm{Int}(x)$ t.c. $(U|U)_G$ finito. Siano $\{g_1, \dots, g_n\}$: $g_i x \in U_{\neq x}$

Siano $U_i \ni x$ e $V_i \ni g_i x$ intorni disgiunti.

$\Longrightarrow U' = U \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} V_i\right) \ni x$ intorno

Se $gx \in U' \Rightarrow gx \in U \setminus \{x\} \Rightarrow g = g_i$

$\longrightarrow g_i x \in U_i$ e $gx \in V_i$ ma $U_i \cap V_i = \emptyset$ <u>ass</u>.

$\to$ <u>Gx è discreto</u>

<u>Vediamo che Gx è chiuso $\Leftrightarrow X \setminus Gx$ aperto</u>

Sia $y \in X \setminus Gx$ e $U \subset \mathrm{Int}(y)$: $(U|U)_G$ è finito.

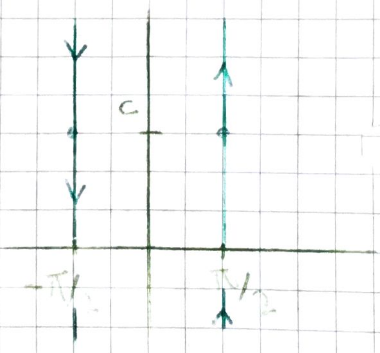
$\Longrightarrow U \cap Gx$ è finito $\Rightarrow U \setminus Gx \ni y$ intorno e $\subseteq X \setminus Gx$

[Azioni propriamente discontinue]

Ex: Consideriamo un sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = \cos^2(x(t)) \\ y'(t) = \sin(x(t)) \end{cases} \text{ in } \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Soluzioni estreme: $\begin{cases} x_n(t) = \pi/2 + n\pi & n \in \mathbb{Z} \\ y_n(t) = (-1)^n t + k & k \in \mathbb{R} \end{cases}$

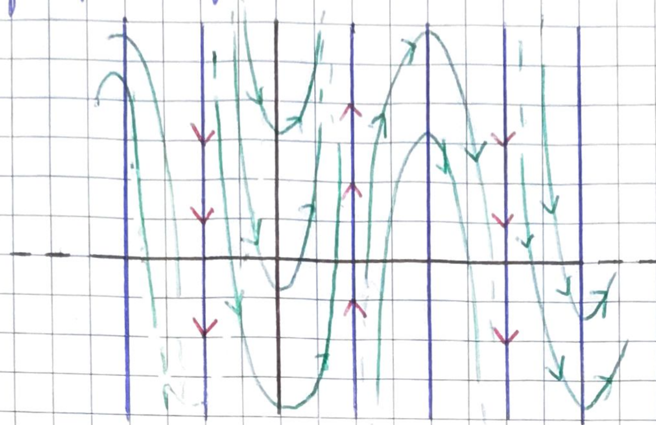


Verifichiamo che se i dati iniziali $(x_0, y_0) \neq (\frac{\pi}{2} + n\pi, y_0)$ le soluzioni sono del tipo:

$$y(t) = \sec(x(t)) + c$$

Infatti $\sec(x(t))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \sin(x(t)) \cdot x'(t) = \sin(x(t))$

Quindi il grafico xy delle soluzioni è:



Verifico che $x(t) = \arctg(t+c) + n\pi$ risolve:

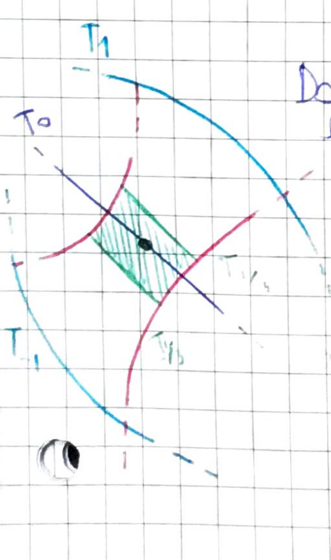
$$x'(t) = \frac{1}{1+(t+c)^2} \quad \text{e} \quad \cos^2(\arctg(t)) = \frac{1}{1+t^2} \checkmark$$

Vogliamo definire un'azione $\mathbb{R} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ t.c. $t \cdot (x,y) =$ posizione all'istante t della soluzione che parte da (x_0, y_0)

1. AZIONE : $s \cdot (t \cdot (x,y)) = (s+t) \cdot (x,y)$
2. CONTINUA

Restringo l'azione a $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ questa azione è:

- LIBERA (non ci sono punti fissi)
- VAGANTE $\exists$ U intorno di (x,y) che non interseca nessun traslato $n \cdot U$ per $n \neq 0$.



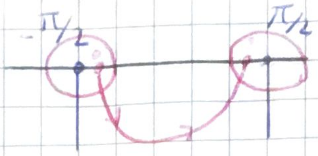
Dato (x,y) siano C_1 e C_2 due curve vicine. E sia T_0 una curva per (x,y) ortogonale a tutte le curve fra C_1 e C_2.

$\Rightarrow$ $T_n := n \cdot T_0$

Sia inoltre U l'aperto compreso fra $C_1, C_2, T_{1/3}, T_{-1/3}$.

Allora $U \cap nU = \emptyset \quad \forall n \neq \{e\}$

- NON É PROPRIA



Per ogni coppia di intorni di

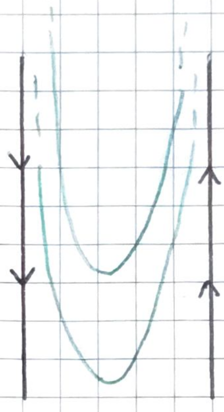
$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\in U$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)\in V$ vale $n\cdot U\cap V\neq\emptyset$ per ∞ $n\in\mathbb{Z}$.

Osservo che $\left(-\frac{\pi}{2}+a,0\right)\in\mathbb{Z}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-a,0\right)$ se per andare da $-\frac{\pi}{2}+a$ in $\frac{\pi}{2}-a$ ci metto un tempo intero

Ora detto t_a il tempo per andare da $\left(-\frac{\pi}{2}+a,0\right)\to\left(\frac{\pi}{2}-a,0\right)$ si ha:

$$\frac{\pi}{2}-a = x(t_a) = \arctan(t_a+c) \to t_a = tg\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+c$$

Quindi $n\cdot U\cap V\neq\emptyset$ per infiniti n.



Variazione dell'esempio:

Sia $S=[-\pi/2,\pi/2]\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$

e incollo i lati seguendo il verso:

rel. eq $\to$ $\left(-\frac{\pi}{2},y\right)\sim\left(\frac{\pi}{2},y\right)$

Quindi l'azione $\mathbb{R}\times S\to S$ passa al quoziente: $S/\sim$

Basta vedere che $t\cdot\left(-\frac{\pi}{2},y\right)\sim t\cdot\left(\frac{\pi}{2},-y\right)$

$\left(-\frac{\pi}{2},y-t\right)\sim\left(\frac{\pi}{2},-y+t\right)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[d] \arrow[dr, "\Phi'_t"] & S \arrow[d] \\ S/\sim \arrow[r, "\gamma_t"'] & S/\sim \end{tikzcd}$$

Quindi le orbite sono ancora chiuse e discrete

$\left(\mathbb{Z}\times S/\sim\ \to\ S/\sim\right)$

Questa azione NON É VAGANTE:

Come sopra $\forall$ V intorno di $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ esistono infiniti n tali che $nV\cap V\neq\emptyset$.

Ne deriva che VAGANTE $\Rightarrow$ ORBITE DISCRETE ma non il viceversa!

$f: X \to Y$ surg. chiusa e X a base numerabile, fibre di f compatte. 12/06
Allora Y è a base numerabile.

f chiusa: posso associare ad ogni aperto di X un aperto di Y

$A \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $A' = Y - f(X \setminus A)$ aperto in Y

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base numerabile di X.
Definisco $\mathcal{A} = \{$unioni finite di elementi di $\mathcal{B}\}$

Oss: $\mathcal{A}$ famiglia di aperti di X ancora numerabile.

Allora definiamo $\mathcal{B}' = \{A' \mid A \in \mathcal{A}\}$ è numerabile
sono aperti di Y

Vediamo che $\mathcal{B}'$ è una $\boxed{\text{base}}$ di Y.

Sia $U \subset Y$ aperto: $y \in U$, f surgettiva $\to$ $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

In particolare $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} B_i$ e i $B_i \in \mathcal{B}$

compatto

quindi esiste N t.c. $f^{-1}(y) \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} B_i}_{A} \in \mathcal{A}$

Allora $f^{-1}(y) \subset A \subset f^{-1}(U) \longrightarrow y \in A' \subset U$.

Controesempio: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (contrazione di $\mathbb{Z}$ a un punto)

- surg.
- chiusa [C chiuso in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(f(C)) = \begin{cases} C \\ C \cup \mathbb{Z} \end{cases}$ chiuso $\Rightarrow f(C)$ chiuso]
- fibre non compatte

Ma $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ non è N1 né N2

Sia $K \subset X$ con K chiuso e compatto in X e considero X/K

1) X è T2 $\Rightarrow$ X/K è T2
2) X è loc. cmpt $\Rightarrow$ X/K è cmpt
3) X a base numerabile $\Rightarrow$ X/K a base numerabile

Oss: $X \xrightarrow{p} X/K$. p è surg e chiusa.

Inoltre p è a fibre compatte: $p^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \notin K \\ K & \text{se } y \in K \end{cases}$

$\to$ 3) è l'esercizio sopra.

1) X è T2 $\Rightarrow X/_K$ è T2.

Per ogni $x, y \in X/_K$ devo trovare due aperti disgiunti che li separano

- Se $x, y \neq p(K) \to$ ok
- Se $x = p(K)$: voglio trovare due aperti U e V di X tali che
  $y \neq p(K)$ $\quad U \cap V = \emptyset$, $K \subset U$ e $y \in V$.

$\forall z \in K$ trovo $\underset{z}{\underset{\psi}{U_z}}$, $\underset{y}{\underset{\psi}{V_y(z)}}$ disgiunti. (X è T2)

$$\Rightarrow K \subset \bigcup_{z \in K} U_z \xrightarrow[K \text{ cmpt}]{} \exists z_1, \dots, z_n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i} = U$$

Allora $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_y(z_i)$: $V \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_{z_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(V_y(z_i) \cap U_{z_i})}_{= \emptyset}$

T2 + T3

Oss : X regolare $\to X/_C$ T2 $\forall C$.

Ex : $\mathbb{R}^n$ regolare. Sia $C \subsetneq \mathbb{R}^n$ chiuso e sia $y \in \mathbb{R}^n \setminus C$
$\uparrow$ aperto

$\to \exists r : B_r(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus C$

Inoltre $\exists r' : \overline{B_{r'}(y)} \subset B_r(y)$

$\to U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r'}(y)}$ e $V = B_{r'}(y)$

Hausdorff + localmente compatto $\Rightarrow$ regolare

Es [Hausdorff non regolare]

Sia $K = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ e sia $\mathbb{R}_K = \mathbb{R}$ con la top euclidea
$\tau = \langle (a,b), (a,b) \setminus K \rangle$

1. $\mathbb{R}_K$ è Hausdorff
2. Osserviamo che $K \subset \mathbb{R}_K$ è chiuso, ma non riesco a separare $\{0\}$ e K.

2) Supponiamo X loc compatto.

Vediamo che K ammette un intorno compatto in X, ovvero $\exists H \subset X$ compatto con $K \subset H^\circ$

Infatti se lo trovo vale $K \subset H^\circ \subset H \longrightarrow p(K) \in p(H^\circ) \subset p(H)$
intorno compatto di $p(K)$

$\forall x \in K$ sia H_x intorno cmpt di x : $x \in H_x^\circ \subset H_x \longrightarrow K \subset \bigcup_{x \in K} H_x^\circ$

K cmpt, $\exists x_1, \dots, x_n : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}^\circ \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i} = H$ cmpt come richiesto.

Ex: vediamo che $\left[\mathbb{R}^2/\mathbb{R}\right]$ non è localmente compatto ($\mathbb{R} = \{y=0\}$)
($p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{R}$)
T2

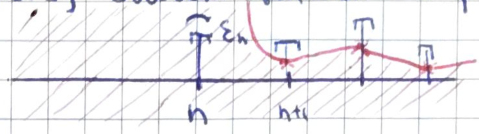
Supponiamo per assurdo che $x_\mathbb{R} = p(\mathbb{R})$ abbia un intorno compatto U.

$\Rightarrow \quad p^{-1}(U) \supset C \supset \mathbb{R} \Rightarrow \underset{\text{chiuso}}{p(C)} \subset U$ in un compatto: $p(C)$ compatto

$\to \forall n \ \exists \varepsilon_i > 0 : \{n\} \times [0, \varepsilon_i] \subset p^{-1}(U)$

Allora $C = \mathbb{R} \cup \{\{n\} \times [0, \varepsilon_i]\}$ chiuso saturo $\to p(C)$ compatto ~~chiuso~~

Ma ad esempio V_n =



prendo tutto fino ad n poi solo intervalli $\underset{N}{\bar{\Sigma}}$

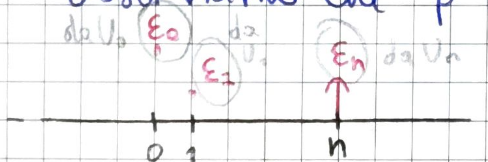
- $\mathbb{R} \subset V_n \to V_n$ saturo
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = C$ ma non ammette sottoricoprimenti.

Ex: $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ non è primo numerabile

Per assurdo sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistema numerabile di intorni di $x_\mathbb{R}$

Costruiamo un aperto saturo in $\mathbb{R}^2$ che non contiene $p^{-1}(U_n) \longrightarrow p(U)$ intorno di $x_\mathbb{R}$ che non contiene nessun $U_n \to$ assurdo

Osserviamo che $p^{-1}(U_n)$ è un intorno aperto di $\mathbb{R}$



$\forall n \in \mathbb{R} : (n, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$
$\to \exists \, \varepsilon_n > 0 : (n, \varepsilon_n) \in U_n$

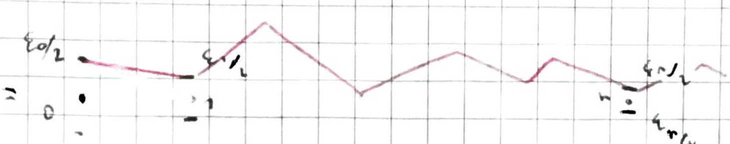
V: considero la spezzata che interpola i pt medi $(0, n) - (n, \varepsilon_n)$ e sia V il sottografico della spezzata.

$U_0 =$ ε_0, 0, ε_0

$U_1 =$ ε_1, 1, ε_1

$U_n =$ ε_n, n, ε_n

$\to V =$



non contiene nessun U_n

X compattamente generato e $p: X \to Y$ identificazione
$\Rightarrow$ Y compattamente generato.

[X cmpt generato $:\Leftrightarrow$ A aperto in X $\Leftrightarrow$ $A \cap K$ aperto in K $\forall K$ cmpt]

Sia $A \subset Y$ t.c. $A \cap K$ aperto in K $\forall K$ compatto di Y
$\Rightarrow$ $A \cap p(H)$ aperto in $p(H)$ $\forall H \subset X$ compatto
Ora A aperto in Y $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(A)$ aperto in X
$\Leftrightarrow$ $p^{-1}(A) \cap H$ aperto in H $\forall H$ cmpt di X
ma $p^{-1}(A) \cap H = p_H^{-1}(\underbrace{A \cap p(H)}_{\text{aperto in } p(H) \text{ per hp}})$ aperto in H ok

X spazio N_1 $\Rightarrow$ X compattamente generato
Sia $C \subset X$ tale che $C \cap K$ chiuso in K $\forall K$ compatto di X
Voglio mostrare che C chiuso in X.
Sia $x \in \overline{C}$, $\exists$ $x_n \in C$ t.c. $\lim_n x_n = x$ $\to$ $K = \{x\} \cup \{x_n\}_n$
(X N_1: $\exists$ $U_1 \dots U_n$ sist fond di intorni di x
$x \in \overline{C}$: $\forall i$ $U_i \cap C \neq \emptyset$ $\to$ sia $x_n \in U_n \cap C$
Ma allora $\forall$ U intorno di x, $U \supset U_n$ per qualche n
$\to$ $x_n \in U \cap C$)
Allora K cmpt, $K \cap C$ è chiuso $\to$ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K \cap C$
Quindi $\lim_n x_n = x \in K \cap C$ $\Rightarrow$ $x \in C$.

Se X è N_1: $C \subset X$ chiuso $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\{x_n\} \subset C$ t.c. $x_n \to x \in X$
allora $x \in C$.

Abbiamo anche una caratterizzazione degli aperti in termini di successioni.

Se X è N_1: $U \subset X$ è aperto $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\{x_n\} \subset X$ t.c. $x_n \to x \in X$
allora $x_n \in U$ definitivamente

- continuità sugli spazi $N1$

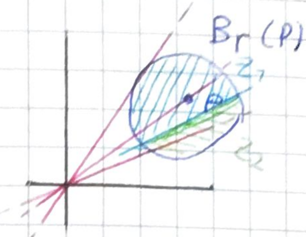
Allora f continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.

Def: X sp. top è localmente connesso se $\forall x \in X$ esiste $\mathcal{U}_x$ sistema fondamentale di intorni connessi 02/25

Oss: se X è localmente connesso $\Rightarrow$ le componenti connesse sono aperte

Sia infatti $C \subset X$ componente connessa:

$\forall x \in C \ \exists x \in U$ intorno connesso $\Rightarrow U \subset C$



Es:
- X e Y loc. connessi $\rightarrow X \times Y$ loc. connesso
- $\mathbb{R}^n$ loc connesso
- $X = \{ax = by \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$

  - X connesso per archi $\Rightarrow X$ connesso
  - Vediamo che X non è loc connesso: fisso P, considero $B_r(P) \not\ni O$

  Supponiamo $\exists\, \mathcal{U}_P$ (sist fond di intorni connessi) $\Rightarrow$
  $\exists\, V \in \mathcal{U}_P$ t.c. $V \subset B_r(P)$ e V è connesso.

  Oss: per la PROP ARCHIMEDEA, dati $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q} \rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in (q_1, q_2)$

  Allora:
  siano $P_1, P_2 \in V$ e che appartengono a due rette diverse
  $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $y = \alpha x$ separa P_1 da P_2
  Sia allora $V_1 = Z_1 \cap V$ e $V_2 = Z_2 \cap V$

  - $Z_1 \cap Z_2 = V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  - $V_1 \cup V_2 = (Z_1 \cup Z_2) \cap V = V \quad \rightarrow V$ sconnesso $\longrightarrow$ ass.
  - V_1 e V_2 chiusi

Def: X sp. topologico, poniamo $\pi_0(X) = X/\sim$ dove $\sim$ è t.c.
$x \sim y \Leftrightarrow x$ e y sono connessi da un arco

Formalizzato meglio:

$\Omega(X, x, y) = \{\alpha : [0,1] \rightarrow X$ continua $\mid \alpha(0) = x, \ \alpha(1) = y\}$

$\Rightarrow x \sim y \Leftrightarrow \Omega(X, x, y) \neq \emptyset$

1. $\sim$ è REL DI EQUIVALENZA

R: $\alpha(t) = x \longrightarrow x \sim x$
S: $x \sim y \rightarrow \exists\, \alpha$ che connette x e y: $\beta(t) = \alpha(1-t)$ connette y e x
T: $\underset{\alpha}{x \sim y}$ e $\underset{\beta}{y \sim z} \longrightarrow$ unisco α con β e uso che $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$ è un ricoprimento fondamentale

$\rightarrow \pi_0(X)$ è l'INSIEME DELLE COMPONENTI CONNESSE per ARCHI di X.

Oss: le comp. connesse per archi in genere non sono né aperte né chiuse.

es: $X = \underbrace{\{0\} \times [-1,1]}_{X_1} \cup \underbrace{\{(t, \sin(1/t)) \mid t > 0\}}_{X_2}$

$\pi_0(X) = \{X_1, X_2\}$

1. • X_2 connesso per archi $\Rightarrow$ connesso
   • $\overline{X_2} = X \longrightarrow X$ connesso

2. X non è connesso per archi.

supp. $\exists\ \alpha : \underset{t}{[0,1]} \longrightarrow \underset{(\alpha_1(t), \alpha_2(t))}{\Omega}$ continua t.c. $\alpha(0) = (0, a)$ e $\alpha(1) = (b, \sin(1/b))$ $b > 0$

$\rightarrow \{t \in [0,1] \mid \alpha_1(t) = 0\}$ chiuso in un cmpt $\rightarrow$ CMPT

$\Rightarrow \exists\ m$ pt di massimo di α_1 su $[0,1]$: $\alpha_1(m) = 0$

Supp. $\alpha_2(m) \geq 0 \Rightarrow \exists\ \delta \mid \alpha_2(t) \geq -1/2\ \ \forall t \in [m, m+\delta]$

$\rightarrow \alpha_1([m, m+\delta])$ è connesso e non ridotto ad un unico pt.

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon$ t.c. $[0, \varepsilon] \subset \alpha_1([m, m+\delta])$ e $\exists\ s \in (0, \varepsilon]$: $\sin(1/s) = -1$

Sia $t_0 \in [m, m+\delta]$ t.c. $\alpha_1(t_0) = s \rightarrow \alpha_2(t_0) = -1$. ASS.

Def: X è loc. connesso per archi se $\forall x\ \exists\ \mathcal{U}_x$ sistema fondamentale di intorni connessi per archi

Prop. X localmente connesso per archi $\Rightarrow$ le componenti connesse per archi sono APERTE E CHIUSE
(e coincidono con le componenti connesse di X)

Dim: Sia $x \in X$, C_x la sua comp. connessa per archi.
$y \in C_x$: $\exists\ V \ni y$ intorno connesso per archi:

$$\forall z \in V\ \exists\ \alpha \in \Omega(X, y, z) \text{ e } \exists\ \beta \in \Omega(X, x, y)$$

(1) $\Rightarrow \beta * \alpha \in \Omega(X, x, z)\ \forall z \in V \longrightarrow V \subset C_x \rightarrow C_x$ APERTA

(2) $X = \bigcup\limits_{c.c.a} C \rightarrow C_x = X \setminus \underbrace{\bigcup\limits_{\substack{C\ c.c.a \\ C \neq C_x}} C}_{\cup \text{ aperti} = \text{aperto}} \longrightarrow C_x$ CHIUSA

(3) $C(x)$ componente connessa di x in X:

$C_x \cap C(x)$ aperto e chiuso in $\underset{\text{connesso}}{C(x)} \Rightarrow C_x \quad C(x)$

Ma C_x è connesso per archi $\rightarrow C_x$ è connesso $\Rightarrow C_x \subset C(x)$

$\rightarrow C_x = C(x)$

Oss: se $f : X \rightarrow Y$ continua allora f induce un'applicazione

$$f_* : \underset{[x]}{\pi_0(X)} \longrightarrow \underset{[f(x)]}{\pi_0(Y)}$$

Vediamo che $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ è ben definita:

se $\alpha \in \Omega(X, x, y) \Rightarrow f \circ \alpha \in \Omega(Y, f(x), f(y))$

PROPRIETÀ [FUNTORIALI]

- $f = Id_X \Rightarrow f_* = Id_{\pi_0(X)}$
- $X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[g]{} Z \Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

Def [Esaustione in cmpt]

Prop: sia $\{K_n\}$ un'esaustione in cmpt di X t.c.

$\underset{\substack{\text{inclusione} \\ X \setminus K_{n+1} \hookrightarrow X \setminus K_n}}{i_*}: \pi_0(X \setminus K_{n+1}) \to \pi_0(X \setminus K_n)$ è bigettiva

$\Rightarrow \forall$ esaustione in compatti con la stessa proprietà $\pi_0(X - K_n)$ ha la stessa cardinalità [INVARIANTE TOPOLOGICO]

Dim: Sia $\{H_n\}$ un'es. in cmpt con la stessa prop.

$h < k$, $m < n$ t.c. $H_h \subseteq K_m \subseteq H_k \subseteq K_n$

$$\Rightarrow \pi_0(X \setminus K_n) \to \pi_0(X \setminus H_k) \to \pi_0(X \setminus K_m) \to \pi_0(X \setminus H_h)$$

big big.

$\to$ sono tutte bigezioni.

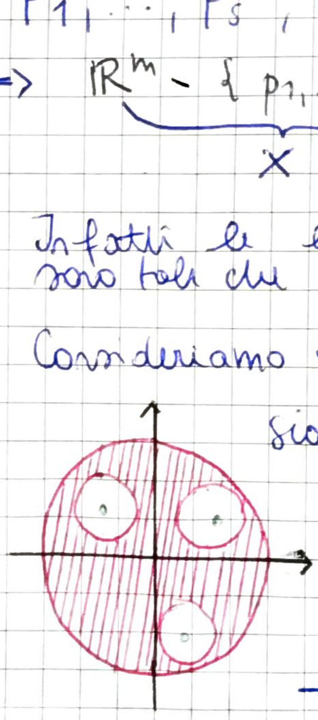
Conseguenza:

$P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t \in \mathbb{R}^m : s \neq t$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m - \{p_1, \dots, p_s\}}_{X} \not\cong \mathbb{R}^m - \{Q_1, \dots, Q_t\}$

Infatti le esaustioni in cmpt di X con la propr. precedente sono tali che $|\pi_0(X \setminus K_n)| = s+1$.

Consideriamo $\{K_n\}$ t.c. $K_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < n \text{ e } \|x - p_i\| \geq 1/n \ \forall i\}$



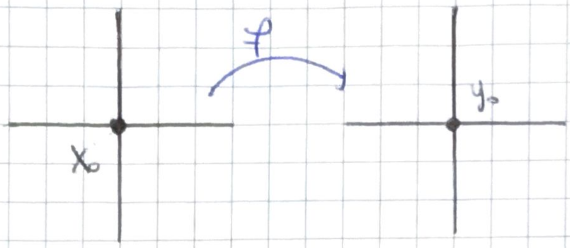
sia $n_0 \in \mathbb{N}$ $\|p_i\| \leq n_0$ $\forall i$: se $n > n_0$ allora

- $\#\{\pi_0(X \setminus K_n)\} = s+1$
- $X \setminus K_{n+1} \hookrightarrow X \setminus K_n \Rightarrow \pi_0(X \setminus K_{n+1}) \simeq \pi_0(X \setminus K_n)$

$\to$ $s+1$ è un invariante topologico di X.

② TOPOLOGIA ALGEBRICA

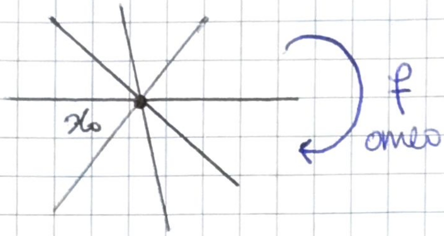
(da 5):



f omeomorfismo:

$f(x_0) = y_0$

[unico pt t.c. $|\pi_0(X - x_0)| = 4$]



x_0 fissato: preso U_{x_0} intorno, x_0 è l'unico punto t.c.

$$|\pi_0(U_{x_0} - x_0)| = 8$$

→ vogliamo formalizzare l'idea di "componenti connesse locali"

<u>Def</u>: π_0 locale $:= \pi_0(X - \{x_0\}, x_0)$ cioè sia

$\mathcal{U}$ un sistema fondamentale di intorni di x_0

$$\Rightarrow \pi_0^{\mathcal{U}}(X - \{x_0\}, x_0) = \{ s \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_0(U - \{x_0\}) \mid s \text{ coerente} \}$$

dove s coerente significa:
per ogni $U, V \in \mathcal{U}$ tali che $U \subset V$: $i_*(s_U) = s_V$

$i : U \setminus x_0 \hookrightarrow V \setminus x_0$ e $i_* : \pi_0(U \setminus x_0) \to \pi_0(V \setminus x_0)$

→ Vediamo che $\pi_0^{\mathcal{U}}(X - \{x_0\}, x_0)$ non dipende da $\mathcal{U}$

Sia $\mathcal{V}$ un sist fond. di intorni di x_0, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}$:

<u>Caso $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$</u>: [se $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{U}'$: confronto $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ con $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$]

Sia $p : \pi_0^{\mathcal{V}}(X - \{x_0\}, x_0) \longrightarrow \pi_0^{\mathcal{U}}(X - \{x_0\}, x_0)$

$$s = (s_V)_{V \in \mathcal{V}} \longmapsto (s_V)_{V \in \mathcal{U}}$$

butto via alcune componenti

- Siano $s, \sigma \in \pi_0^{\mathcal{V}}(X - \{x_0\}, x_0)$ t.c. $p(s) \overset{(1)}{=} p(\sigma)$:

  se $V \in \mathcal{V} - \mathcal{U} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{U} \text{ sist fondam di intorni}}}{\Rightarrow} \exists\, U \in \mathcal{U}$ con $U \subset V$:

  poiché s e σ sono <u>coerenti</u> vale

  $$s_V = i_*(s_U) \qquad \sigma_V = i_*(\sigma_U)$$

  Ma allora: $(1) \Rightarrow (s_U)_{U \in \mathcal{U}} = (\sigma_U)_{U \in \mathcal{U}}$

  e $\forall\, V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$: $s_V = i_*(s_U) = i_*(\sigma_U) = \sigma_V$

  $\rightarrow s = \sigma \longrightarrow p$ è INIETTIVA

- $s \in \pi_0^{\mathcal{U}}(X - \{x_0\}, x_0)$: $\forall\, V \in \mathcal{V}\ \exists\, U \in \mathcal{U}$. $U \subset V$: $s_V = i_*(s_U)$

  $\rightarrow s' = (s_V)_{V \in \mathcal{V}}$ è $\pi_0^{\mathcal{V}}(\ \ )$ $\rightarrow p$ è SURGETTIVA

* OMOTOPIE

Def: $f, g : X \to Y$ continue si dicono OMOTOPE se esiste un'applicazione continua

$$F : X \times [0,1] \to Y \text{ continua tale che } \begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ F(x,1) = g(x) \end{cases} \forall x$$

Oss: $\forall t \; F(\cdot, t) = f_t : X \to Y$ è continua, f_t è una famiglia di funzioni continue che variano con continuità.

Es:
- sia $Y \subset \mathbb{R}^n$ CONVESSO: $f, g : X \to Y$ continue sono omotope e
  $F(x,t) = t f(x) + (1-t) g(x)$ è l'omotopia cercata
- sia $Y \subset \mathbb{R}^n$ STELLATO rispetto a y_0: $f_{y_0} : \begin{matrix} X \to Y \\ x \to y_0 \end{matrix}$ e $g : X \to Y$ continua

  $\to f_{y_0}$ e g sono omotope con $F(x,t) = (1-t) g(x) + y_0 t$

Lemma: Sia $C(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ continua} \}$

$\Rightarrow$ omotopia è una rel d'equivalenza su $C(X,Y)$

Dim:
- $f \sim f$ con $F(x,t) \equiv f(x)$
- $f \sim g$ con $F(x,t) \Rightarrow g \sim f$ con $F'(x,t) = F(x, 1-t)$
- $f \underset{F}{\sim} g$ e $g \underset{G}{\sim} h \Rightarrow H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$
  omotopia fra f e h.

Def: $f : X \to Y$ continua è detta EQUIVALENZA OMOTOPICA fra X e Y

se $\exists \; g : Y \to X$ continua [inversa omotopica] tale che

$$fg \sim I_Y \quad \text{e} \quad gf \sim I_X$$

Es: gli omeomorfismi sono equivalenze omeotopiche

Prop: L'EQUIVALENZA OMEOTOPICA è una relazione d'equiv. tra spazi topologici

Dim:
- $X \sim X$ (scelgo $f = id$)
- $X \sim Y$ con $(f, g) \Rightarrow Y \sim X$ con (g, f)
- lemma (* dim): $X \overset{f_0}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \overset{g_0}{\underset{g_1}{\rightrightarrows}} Z$ continue con $\begin{matrix} f_0 \sim f_1 \\ g_0 \sim g_1 \end{matrix} \to g_0 f_0 \sim g_1 f_1$

$X \sim Y \sim Z$: $X \underset{g_0}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} Y \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} Z$: $X \underset{g_0 g_1}{\overset{f_1 f_0}{\rightleftarrows}} Z$ $\quad \begin{matrix} g_0 g_1 f_1 f_0 \\ \wr \\ g_0 \, id_Y \, f_0 \\ \wr \\ id_X \end{matrix}$ e $\begin{matrix} f_1 f_0 g_0 g_1 \\ \wr \\ f_1 \, id_X \, g_1 \\ \wr \\ id_Y \end{matrix}$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dim}\\ \text{* dim}\end{array}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_0"] \arrow[r, bend right, "f_1"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

t.c. $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$

- $\exists\, F : X \times [0,1] \to Y$ continua, $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$
- $\exists\, G : Y \times [0,1] \to Z$ continua, $G(y,0) = g_0(y)$, $G(y,1) = g_1(y)$

$\Rightarrow H : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ è omotopia fra
$(x,t) \longmapsto G(F(x,t),t)$ $\quad H(x,0) = g_0(f_0(x))$ ✓
e $H(x,1) = g_1(f_1(x))$

<u>Def</u> X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se esiste $f : X \to Y$ equivalenza omotopica.

$Y = \{pt\}$ e $X \sim Y \Rightarrow X$ si dice contrattile

<u>Es</u>: • $X \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a x_0 : $f : X \to \{x_0\}$ cost.
$g : \{x_0\} \hookrightarrow X$

$\Rightarrow fg = I_{\{x_0\}}$ e $gf : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & & x_0 \end{array}$ ma tutte le applicazioni $X \to X$ sono omotope all'applicazione costante [X stellato]

$\Rightarrow X$ è <u>contrattile</u>

Abbiamo visto che:

- omeomorfismo $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ equivalenza omotopica
- l'equivalenza omotopica non conserva la compattezza

<u>Es</u>: $f, g : X \longrightarrow S^n$ t.c. $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x \in X \Rightarrow f \sim g$

Sia $F(x,t) = \dfrac{t f(x) + (1-t) g(x)}{\| t f(x) + (1-t) g(x) \|}$

si annulla $\Leftrightarrow tf = (1-t)g$ ma $f, g \in S^n$
$\Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ falso

<u>Es</u>: $a : \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & S^n \\ x & & -x \end{array}$ mappa antipodale e $2m-1 = n \Rightarrow a \sim Id$

Osserviamo che $S^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m} \sim \mathbb{C}^m$ e $e^{t\pi i} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ passa in modo continuo da 1 a -1.

$\Rightarrow F(x,t) = e^{t\pi i} x$ è una omotopia fra l'identità su S^n e a

$\to a \sim id_{S^n}$

Es: $f, g : S^n \to S^n$ con n dispari t.c. $f(x) \neq g(x)\ \forall x \to f \sim g$

Per esercizio 5: $f \sim -g = a \cdot g \underset{2 \nmid n}{\sim} id_{S^n} \cdot g = g$

Equivalenza omotopica:

Prop: ① Siano $f, g : X \to Y$ omotope $\Rightarrow f_* = g_*$

② Se f è una equivalenza omotopica $\Rightarrow f_* : \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$

Dim: 1] Sia $x \in X$: vediamo che $\Omega(Y, f(x), g(x)) \neq \emptyset$

infatti $F : X \times [0,1] \to Y$: $F(\cdot, 0) = f(\cdot)$ e $F(\cdot, 1) = g(\cdot)$

induce: $F_x : [0,1] \to Y$, $t \mapsto F(x,t)$ è un cammino da $f(x)$ a $g(x)$.

$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, $[x] \mapsto [f(x)]$ e $g_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, $[x] \mapsto [g(x)]$

ma per quanto detto $[f(x)] = [g(x)]\ \forall x \to f_*(x) = g_*(x)$.

2] Sia $h : X \to Y$ t.c. $fh \sim id_Y$ e $hf \sim id_X$

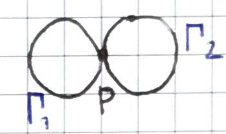
$\Downarrow (1)$ $\qquad\qquad \Downarrow (1)$

$f_* h_* = (fh)_* = id_{\pi_0(Y)}$ $\qquad h_* f_* = (hf)_* = id_{\pi_0(X)}$

ovvero f_* è iniettiva e surgettiva.

Cor: la connessione si conserva con l'equivalenza omotopica

Def: $Y \subset X$ si dice retratto di X se $\exists\ r : X \to Y$ continua t.c. $r(y) = y\ \forall y \in Y$

es: 

: sia $X = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$: $r : X \to \Gamma_1$

$$x \to \begin{cases} x & x \in \Gamma_1 \\ P & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Def: $Y \subset X$ si dice retratto per deformazione se $\exists$

$R : X \times [0,1] \to X$ (deformazione) t.c.
continua

$R(x,0) \in Y\ \forall x \in X$; $R(x,1) = x\ \forall x \in X$, $R(y,t) = y\ \forall y \in Y$

es: $X \subset \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a $x_0 \Rightarrow X$ si retrae per deformazione a x_0

$R(x,t) = tx + (1-t)x_0$ $\qquad$ $R(\cdot, 0) = x_0$
$R(x, 1) = x$
$R(x_0, t) = x_0$

Prop. $Y \subset X$ retratto per deformazione $\Rightarrow$ Y è un retratto di X e $i: Y \hookrightarrow X$ è equiv. omotopica

Dim: Sia $R: X \times [0,1] \to X$ la deformazione

① $R(x,0) = i(r(x))$: r retrazione su Y

② $i: Y \hookrightarrow X$ e $r: X \longrightarrow Y$ t.c. $r(y) = y \quad \forall y \in Y$

- $r \circ i = id_Y$
- $i \circ r : X \to Y \hookrightarrow X \overset{?}{\sim} id_X$

$R(x,0) = i \circ r(x)$
$R(x,1) = x$ $\longrightarrow$ R è una omotopia fra $i \circ r$ e id_X ✓

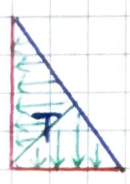
Oss: X di Hausdorff e $Y \subset X$ retratto $\Rightarrow$ Y è chiuso
[esiste un'applicazione $\underset{(i(r(x)))}{\wedge}$ in cui Y è il ssp dei pt. fissi]

N.B: retratto $\not\Rightarrow$ retratto per def [si dimostrerà che  non è omotopic. equiv. a ○]

esempi

- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è un retratto per deformazione

$$R: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$
$$(x, t) \qquad\qquad tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

-  $L \subset T$ è un retratto per deformazione:

$$R(x,y,t) = t(x,y) + (1-t)\left(x - \min(x,y),\, y - \min(x,y)\right)$$

- $X = \{(p,q) \in S^n \times S^n \mid p \neq -q\}$ omotopicamente equivalente a S^n

Basta vedere che X si retrae per deformazione a $Y = \{(p,q) \mid p = q\} \approx S^n$

Sia $R: X \times [0,1] \longrightarrow X$

$$((p,q), t) \qquad \left(p, \frac{tq + (1-t)p}{\|tq + (1-t)p\|}\right)$$

- ben definita: $tq = -(1-t)p \iff q = \pm p$ ma se $\begin{cases} q = p \to tq + (1-t)q = q \\ q = -p \text{ an per } p \end{cases}$

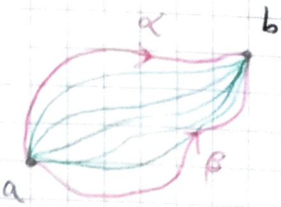
- $R(x,0) = R((p,q),0) = (p,p)$
$R(x,1) = R((p,q),1) = (p,q)$
$R(y,t) = R((p,p),t) = (p,p)$

$n=1$:  Toro aperto a sx (S'x S')

Def: $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ cammini in $\Omega(X, a, b)$

allora α e β si dicono <u>omotopicamente equivalenti</u> se $\exists$ una omotopia di cammini

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \text{ tale che}$$



$$F(t,0) = \alpha(t) \quad e \quad \forall t \quad F(0,t) = a$$
$$F(t,1) = \beta(t) \qquad\qquad F(1,t) = b$$

es: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{R}^n, x, y)$ $x, y \in X$

$$\Rightarrow \alpha \sim \beta \text{ con } F(t,s) = s \cdot \alpha(t) + (1-s)\beta(t)$$

Oss: inversione e giunzione commutano con la relazione di omotopia

Cioè: • $i : \Omega(X, a, b) \longrightarrow \Omega(X, b, a)$ inversione
$\qquad \alpha(t) \qquad\qquad \alpha(1-t)$

$$\Rightarrow \alpha \sim \beta \Rightarrow i(\alpha) \sim i(\beta)$$

• $* : \Omega(X, a, b) \times \Omega(X, b, c) \longrightarrow \Omega(X, a, c)$ giunzione
$\qquad (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha * \beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \sim \alpha' \\ \beta \sim \beta' \end{cases} \Rightarrow \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$$

Dim: • $F : [0,1]^2 \rightarrow X$ omotopia di cammini fra α e β

$\Rightarrow F(1-t, s)$ omotopia di cammini fra $i(\alpha)$ e $i(\beta)$

• $F : [0,1]^2 \rightarrow X$ omotopie di cammini fra α, α' e β, β'
$\;\; G : [0,1]^2 \rightarrow X$

$$\Rightarrow F * G(t,s) = \begin{cases} F(2t, s) & t \in [0, 1/2] \\ G(2t-1, s) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

è omotopia di cammini fra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$

∘ ASSOCIATIVITÀ di $*$ a meno di omotopia:

$$\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$$

<u>Lemma</u> Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e sia $\phi\ [0,1] \to [0,1]$ continua con $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$

$$\Rightarrow \alpha \sim \alpha \circ \phi$$

<u>Dim</u>: Cerco una omotopia fra α e $\alpha \circ \phi$. Sia $F : I^2 \longrightarrow X$ tale che $F(t,s) = \alpha(s\phi(t) + (1-s)t) \to$ ✓

L'associatività di $*$ (modulo omotopia), segue: infatti

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = (\alpha * (\beta * \gamma))(\phi(t))$$

usando

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & t \leq 1/4 \\ t + 1/4 & t \in (1/4, 1/2) \\ \frac{t+1}{2} & t \geq 1/2 \end{cases}$$

• Elementi neutri e "inversi"

- $\Omega(X, a, a) \times \Omega(X, a, b) \longrightarrow \Omega(X, a, b)$

$$(1_a, \alpha) \longmapsto 1_a * \alpha$$

$\Rightarrow 1_a * \alpha \sim \alpha$ e equivalentemente $\alpha * 1_b \sim \alpha$

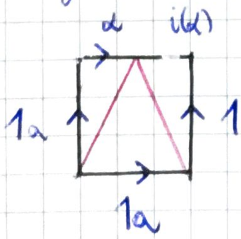
[anche questo segue dalle riparametrizzazioni]

- $\Omega(X, a, b) \times \Omega(X, b, a) \longrightarrow \Omega(X, a, a)$

$$(\alpha, i(\alpha)) \longmapsto \alpha * i(\alpha)$$

$\Rightarrow \alpha * i(\alpha) \sim 1_a$ e equiv. $i(\alpha) * \alpha \sim 1_b$. Infatti

scegliendo $F : I^2 \to X$ t.c.



$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \leq s/2 \\ \alpha(s) & s/2 \leq t \leq 1 - s/2 \\ \alpha(2-2t) & t \geq 1 - s/2 \end{cases}$$

$\to$ F è omotopia fra $F(t,0) = 1_a$ e $F(t,1) = \alpha * i(\alpha)$
(e $F(0,s) = a$, $F(1,s) = b$)

Nel caso di cappi (cammini in $\Omega(X, a, a)$) otteniamo una struttura di gruppo su $\Omega(X, a, a)/\sim$

Def: Il GRUPPO FONDAMENTALE di X e a (a meno di omotopia) è:

$$\pi_1(X,a) = \Omega(X,a,a)/\sim$$

relazione di omotopia fra cammini

dotato dell'operazione $*$, con elemento neutro $[1_a]$, $\alpha^{-1} = [i(\alpha)]$

TEO: $\pi_1(X,a)$ è un gruppo.

[dimostrazione già vista]

$*$ Consideriamo di nuovo $\Omega(X,a,b)$.

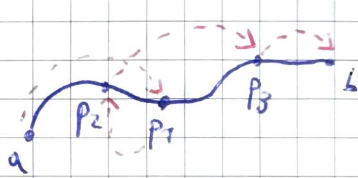
Prop: Sia $\alpha \in \Omega(X,a,b)$, $p \in [0,1]$ e $c = \alpha(p)$.
Siano α_0 e α_1 le parametrizzazioni std di $\alpha|_{[0,p]}$, $\alpha|_{[p,1]}$

$$\Rightarrow \alpha \sim \alpha_0 * \alpha_1$$

Dim: invarianza per riparametrizzazione

Più in generale dati $p_1, \dots, p_n \in [0,1]$ (anche non ordinati) posto $p_0 = 0$ e $p_{n+1} = 1$ e definito $\alpha_i(t) = \alpha((1-t)p_i + tp_{i+1})$

$$\Rightarrow \alpha \sim \alpha_0 * \alpha_1 * \dots * \alpha_n$$



? Come si comportano le funzioni continue relativamente all'omotopia di cammini?

Prop: Sia $f: X \to Y$ continua

1) $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, $\alpha \sim \beta \Rightarrow f(\alpha) \sim f(\beta)$ in $\Omega(Y, f(a), f(b))$

2) $\alpha \in \Omega(X,a,b)$, $\beta \in \Omega(X,b,c)$ $\Rightarrow$ $f(\alpha * \beta) \sim f(\alpha) * f(\beta)$, $i(f(\alpha)) \sim f(i(\alpha))$

Dim: 1) Sia $F: I^2 \to X$ omotopia fra α e β, allora $f \circ F: I^2 \to Y$ è una omotopia fra $f(\alpha)$ e $f(\beta)$.

2) Le operazioni di giunzione e di inversione operano solamente su $[0,1]$, dunque sono compatibili con f.

Lemma

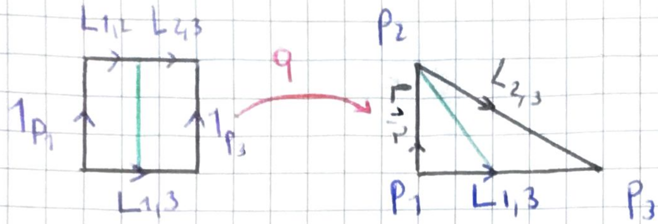
Sia $T \subset \mathbb{R}^n$ un triangolo di vertici P_1, P_2, P_3: $T = \{\sum t_i p_i \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$
Sia X sp. topologico, con $f: T \to X$ continua, siano

$f_{i,j}: [0,1] \to X$ i cammini ottenuti restringendo f al lato $L_{i,j}$

$tp_j + (1-t)p_i$

$$\to f_{1,3} \sim f_{1,2} * f_{2,3}$$

Dim: costruiamo in T una omotopia di cammini fra $\ell_{1,3}$ e $\ell_{1,2} * \ell_{2,3}$:



$$q(t,s) = \begin{cases} (1-t-ts)\,p_1 + 2ts\,p_2 + (t-ts)\,p_3 \\ (1-t-s+ts)\,p_1 + 2(1-t)s\,p_2 + (t-s+ts)\,p_3 \end{cases}$$

Allora: $q(t,0) = L_{1,3}$, $q(t,1) = L_{1,2} * L_{2,3}$
$q(0,s) = p_1$, $q(1,s) = p_3$

$\rightarrow$ q è una omotopia fra $L_{1,3}$ e $L_{1,2} * L_{2,3}$

Quindi posso ricavare una omotopia fra $f_{1,3}$ e $f_{1,2} * f_{2,3}$ componendo con f.

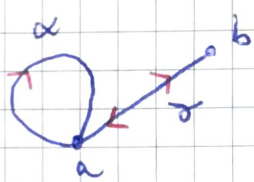
* GRUPPO FONDAMENTALE

Sia $x_0 \in X$: $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim$

Def: X si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e $\pi_1(X, x_0) = e$ per qualche $x_0 \in X$

es: $\cdot \mathbb{R}^n$
$\cdot X \subset \mathbb{R}^n$ stellato (in 0): $\pi_1(X, 0) = e$

Prop: Sia $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ definiamo:



$$\gamma_\# : \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(X,b)$$
$$[\alpha] \longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

$\rightarrow$ $\gamma_\#$ è un ISOMORFISMO.

In particolare $\pi_1(X, x_0)$ dipende come gruppo astratto soltanto dalla componente connessa per archi di x_0.

Dim: - $\gamma_\#$ è ben definito: $\alpha \sim \alpha' \Rightarrow i(\gamma) * \alpha * \gamma \sim i(\gamma) * \alpha' * \gamma$

- $\gamma_\#$ è un omomorfismo: $\alpha, \beta \in \Omega(X, a)$, allora

$$\gamma_\#([\alpha]) * \gamma_\#([\beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma] * [i(\gamma) * \beta * \gamma]$$
$$\gamma_\#([\alpha][\beta]) = \gamma_\#([\alpha * \beta]) = [i(\gamma) * \alpha * \cancel{\gamma * i(\gamma)} * \beta * \gamma]$$

- Vediamo che è una bigezione:

$$i(\gamma)_\# : \pi_1(X, b) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$ è inverso di $\gamma_\#$

- $i(\gamma)_\#$ omomorfismo
- $i(\gamma)_\#(\gamma_\#[\alpha]) = [\alpha]$
$\gamma_\#(i(\gamma)_\#[\beta]) = [i(\gamma) * \gamma * \beta * i(\gamma) * \gamma] = [\beta]$

Vediamo che il gruppo fondamentale si comporta bene con i prodotti

Prop: $\pi_1(X\times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0)\times \pi_1(Y,y_0)$

Dim: $\Omega(X\times Y, (x_0,y_0)) \longrightarrow \Omega(X,x_0)\times\Omega(Y,y_0)$

$\alpha = (\alpha_0,\alpha_1) \longmapsto (\alpha_0, \alpha_1)$

bigezione canonica compatibile con omotopie di cammini

Sia $F: I^2 \to X\times Y$ omotopia fra α e β
$= (F_1, F_2)$ con $F_1 : I^2 \to X$ e $F_2 : I^2 \to Y$
sono omotopie fra α_1 e β_1 e α_2 e β_2.

$\Rightarrow \pi_1(X\times Y, (x_0,y_0)) \simeq \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$

- Sia $f: X\to Y$ applicazione continua, $x_0\in X$

$\leadsto f_*: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ omomorfismo di gruppi
$[\alpha] \qquad [f(\alpha)]$

- ben definito (visto)
- $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha*\beta]) = [f(\alpha*\beta)] = [f(\alpha)*f(\beta)]$ ✓

Se $X = S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t\in[0,1]\} = \{z\in\mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ 03/06

Esercizio: supponiamo per assurdo che $\pi_1(S^1) = 0 \Rightarrow \pi_1(X) = 0 \ \forall X$

Sia $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ voglio far vedere che $[\alpha] = 0 \in \pi_1(X, a)$. Allora

$$\begin{tikzcd} \left[0,1\right] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & X \\ S^1 \arrow[ur, "f_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

t.c. $\alpha(0) = \alpha(1)$ e $S_1 = [0,1] /_{0=1}$

f_α continua

α costante sulle fibre

Se $[\beta] = 0$ in $S^1 \Rightarrow f_\alpha$ induce un $(f_\alpha)_*: \pi_1(S_1, 1) \longrightarrow \pi_1(X, \alpha)$
e per costruzione: $\alpha = f_\alpha \beta \rightarrow [\alpha] = (f_\alpha)_* [\beta]$

Ma $(f_\alpha)_*$ omomorfismo di gruppi: se $[\beta] = 0 \Rightarrow [\alpha] = 0$

* Sia $i: A \hookrightarrow X$ immersione e consideriamo $i_*: \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$

Prop: 1 Se A è un retratto di $X \rightarrow i_*$ è iniettiva
2 Se A è un retratto per deformazione $\Rightarrow i_*$ è isomorfismo

Dim 1 Sia $r: X \rightarrow A$ t.c. $r(y) = y \ \forall y \in A$ continua,
e sia $\alpha \in \Omega(A, a, a)$, vogliamo mostrare che

$$\alpha \sim 1_a \text{ in } X \Longrightarrow \alpha \sim 1_a \text{ in } A \quad [\text{iniettività}]$$

Sia $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ omotopia fra α e 1_a in X, ovvero

$$F(t, 0) = \alpha(t), \quad F(t, 1) = a, \quad F(0, t) = F(1, t) = a$$

Considero $r \circ F: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow A$: $F(0,t) = F(1,t) = a$ e continua.
è omotopia fra $r(F(t,0)) = r(\alpha(t)) = \alpha(t)$ e $r(F(t,1)) = r(a) = a$.

2 Ci basta vedere che i_* è surgettiva, ovvero che

$$\forall \alpha \in \Omega(X, a, a) \ \exists \beta \in \Omega(A, a, a) \text{ con } \beta \sim \alpha$$

Sia $R: X \times [0,1] \rightarrow X$ deformazione di X in A, $- R(X, 0) \in A \ \forall x$
$- R(x, 1) = x \ \forall x \in X$
$- R(y, t) = y \ \forall y \in A$

e sia $r = R(x, 0): X \longrightarrow A$ la retr. associata.

Consideriamo
$$F: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$(t, s) \longmapsto R(\alpha(t), s)$$

è una omotopia di cammini $\left(\begin{array}{l} F(0,s) = R(a, S) = a \\ F(1,s) = R(a,S) = a \end{array}\right)$

fra $F(t, 0) = R(\alpha(t), 0) = r(\alpha(t))$
$F(t, 1) = R(\alpha(t), 1) = \alpha(t)$

scelgo $\beta = r \circ \alpha$.

es: $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ retratto per deformazione

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

questo va dimostrato ancora

PROPRIETÀ "FUNTORIALI" di $f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$

① Se $f = id_X$: $f_* = id_{\pi_1(X,x)}$

② Se $\begin{matrix} f: X \to Y \\ g: Y \to Z \end{matrix} \to (gf)_* = g_* \circ f_*$

Oss: $r: X \to A$ retrazione e $i: A \hookrightarrow X$ allora: $id_A = r \circ i$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \pi_1(A,x) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "(id_A)_* = id(\pi_1(A,x))"'] & \pi_1(X,x) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(A,x) \end{tikzcd}$$

$\to$ i_* iniettiva e r_* surgettiva

Vogliamo allora mostrare che se $f: X \to Y$ equivalenza omotopica

$\Rightarrow$ $f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$ è isomorfismo

Prop: Siano $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ applicazioni continue omotope ($f \sim g$)

Sia $F: [0,1] \times X \longrightarrow Y$ omotopia fra f e g $\begin{cases} F(x,0) = f \\ F(x,1) = g \end{cases}$
e sia $\gamma(t) = F(a,t) \to \gamma \in \Omega(Y, f(a), g(a))$

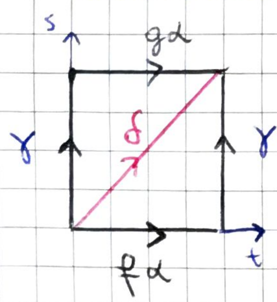
$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & \pi_1(X,a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y, f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\#"'] & & \pi_1(Y, g(a)) \end{tikzcd}$$

commuta

Dim: Voglio vedere che $\gamma_\# f_* [\alpha] = g_\# [\alpha]$ ovvero che
$(i(\gamma) * f_\# [\alpha] * \gamma) = (i(\gamma) * f(\alpha) * \gamma) \sim g\alpha$

oppure $f\alpha * \gamma \sim \gamma * g\alpha$

Considero $\begin{matrix} [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{G} Y \\ (t,s) \qquad\quad F(\alpha(t), s) \end{matrix}$ è omotopia



$\delta(t) = G(t,t) = F(\alpha(t), t) \in \Omega(Y,$

Per il "lemma sui triangoli" troviamo

$\gamma * g\alpha \sim \delta \sim f\alpha * \gamma$

Cor: X sp topologico, $f: X \to X$ con $f \sim id_X$ allora

$f_*: \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(X, f(a))$ è isomorfismo

Dim: [Prop]:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "id_* = id \ [iso]"] & \\ \pi_1(X, f(a)) & & \pi_1(X,a) \arrow[ll, "\gamma_\# \ [iso]"] \end{tikzcd}$$

$\to$ f_* è isomorfismo

TEO: Sia $f : X \longrightarrow Y$ equivalenza omotopica.
Allora
$$f_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a)) \text{ è un isomorfismo}$$

Dim: Sia g inverso omotopico di f:
$$\pi_1(X,a) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(a)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, gf(a)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, fgf(a))$$
Per le proprietà funtoriali:
$$f_* \circ g_* = (fg)_* \text{ e } (fg) \sim id_Y \xrightarrow{Cor} (fg)_* \text{ isomorfismo}$$
$$g_* \circ f_* = (gf)_* \text{ e } (gf) \sim id_X \xrightarrow[Cor]{} (gf)_* \text{ isomorfismo}$$

$\rightarrow f_*$ e g_* sono iniettive e surgettive

Cor: X contrattile (es: qualsiasi stellato in $\mathbb{R}^n$) allora X è semplicemente connesso.

Dim: 1. $\pi_0(X) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \pi_0(pt)$: X connesso per archi
2. $\pi_1(X) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \pi_1(pt) = e \rightarrow \pi_1(X)$ è banale.

Cerchiamo (altri) esempi di spazi topologici con gruppo fondamentale banale

Per farlo usiamo questo teorema [Dim → 03-07]

Teo [Van Kampen - versione debole]
$X = A \cup B$ con $A, B, A \cap B \neq \emptyset$ connessi per archi. Siano $f : A \hookrightarrow X$, $g : B \hookrightarrow X$
e sia $x_0 \in A \cap B$: $f_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$
$g_* : \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

Allora $\pi_1(X, x_0)$ è generato come gruppo da $f_*(\pi_1(A, x_0))$ e $g_*(\pi_1(B, x_0))$

Cor: nelle ipotesi sopra, se anche $\pi_1(A, x_0) = \pi_1(B, x_0) = 0$
$\Rightarrow \pi_1(X) = 0$

Esempio: $X = S^n$ con $n \geq 2$: $A = S^n - \{N\} \approx \mathbb{R}^n$ (via proiezione
$B = S^n - \{S\} \approx \mathbb{R}^n$ stereografica)

$\rightarrow A$ e B semplicemente connessi

Inoltre $A \cap B \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi $\boxed{(n \geq 2)}$

$\underset{(Cor)}{\Longrightarrow} \pi_1(S^n) = 0$. S^n semplicemente connesso

Esempio: $X = \mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ $n \geq 3$. Induzione su $m \geq 0$

P.B. $m = 0 \rightarrow X = \mathbb{R}^n$ sempl. connesso
$m = 1 \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^n - \{P\}$ per deformazione $\rightarrow \mathbb{R}^n - \{P\}$ sempl. connesso
$\pi_1(\mathbb{R}^n - \{P\}) \approx \pi_1(S^n) = 0$

$\underline{m \geq 2}$: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $f(P_2) > f(P_1)$ e siano:

$$A_0 = \{a \in \mathbb{R}^n : f(a) > f(P_1)\} = f^{-1}((f(P_1), +\infty)) \approx \mathbb{R}^n$$
$$B_0 = \{b \in \mathbb{R}^n : f(b) < f(P_2)\} = f^{-1}((-\infty, f(P_2))) \approx \mathbb{R}^n$$

e $A_0 \cap B_0 = f^{-1}((f(P_1), f(P_2))) \approx \mathbb{R}^n$

E $X \cap A_0 = A$, $B = X \cap B_0 \to A, B \approx \mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ $k<n$
e $A \cap B$

$\to$ per ipotesi induttiva:

$X = A \cup B$ è semplicemente connesso.

03/07

* TEO [Van Kampen- debole]

$X = A \cup B$ con $A, B, A \cap B$ aperti connessi per archi, $x_0 \in A \cap B$

Date: $f: A \hookrightarrow X \implies f_*: \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$
$g: B \hookrightarrow X$ $\quad g_*: \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$

$\Rightarrow$ $\pi_1(X, x_0)$ è generato come gruppo da $\mathrm{Im}\, f_*$, $\mathrm{Im}\, g_*$

<u>esempio</u>: <u>$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso per $n \geq 0$</u>

P.B: $n = 0 \to \mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{pt\}$
P.I: $n \Rightarrow n+1$: - $A = U_0 \approx \mathbb{C}^n$ aperti (connesso per archi) SC
- $B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1:0:\dots:0]\}$

- $A \cap B \approx \mathbb{C}^n \setminus \{[0,..,0]\}$ connesso per archi

Vediamo che B si ritrae per def. a $H_0 \approx \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$

$$R: [0,1] \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1:0:\dots:0]\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1:0:\dots:0]\}$$
$$(t, [z_0 : \dots : z_n]) \longmapsto [tz_0 : z_1 : \dots : z_n]$$

e $R(0, [z_0 : \dots : z_n]) = [0 : z_1 : \dots : z_n] \in H_0$ (ben def perché almeno uno z con $i \geq 1$ è $\neq 0$)

$\to$ per Van Kampen: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è SC

<u>esercizio</u>: $X_n \subset \mathbb{R}^3$ sfera unitaria $\subset \mathbb{R}^3$ di centro $(2n, 0, 0)$ $n \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ dimostriamo che $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X_n$ è SC

① $X^N = \bigcup_{n=1}^{N} X_n$ è SC: V-K + ind:

P.I: $A = \{x \in X^{N+1} : x_1 < 2(n+1)\} \to X^N \cup \{\text{semisfera}\} \xrightarrow{\text{def}} X^N$
$B = \{x \in X^N : x_1 > 2n\} \to \approx X^1 \cup \{\text{semisfera}\} \xrightarrow{\text{def}} S^1$

$A \cap B \to$ 

② Prendo un cappio in X $\to$ è l'immagine di $[0,1]$ con una f continua $\to$ COMPATTO $\xrightarrow{\mathbb{R}^3}$ chiuso e lim

$\Rightarrow$ il cappio è contenuto in $\{X_1, \dots, X_N\}$ $\to$ si ritrae a un pt in $X^N \subset X$

- TEO [del numero di Lebegue]
Sia (Y, d) spazio metrico compatto, sia $f: Y \to X$ continua e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X.

Allora esiste un numero δ uniforme t.c.

$$\forall y \in Y, \quad f(B(y, \delta)) \subset A \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

<u>Dim</u>: Sia $Y_n = \{ y \in Y \mid B(y, 2^{-n}) \subset f^{-1}(A)$ per un qualche $A \in \mathcal{A} \}$

Allora: • $Y_n \subseteq Y_{n+1}$
• inoltre $Y = \bigcup_n Y_n$

Mostriamo che $\exists\, n_0 : \quad Y = Y_{n_0}$

① Per induzione $Y_n \subset \mathring{Y}_{n+1}$

② Allora $Y = \bigcup_n \mathring{Y}_n$ ric. aperto $\Rightarrow \quad Y = \bigcup_{i=1}^{N} \mathring{Y}_n = \mathring{Y}_N \subset Y_N$

<u>Dimostriamo 1</u>: ovvero se $y \in Y_n \Rightarrow B(y, 2^{-(n+1)}) \subset Y_{n+1}$

Sia A t.c. $B(y, 2^{-n}) \subset f^{-1}(A)$: consideriamo $z \in B(y, 2^{-(n+1)})$

$\Rightarrow \quad |z - y| \leq 2^{-(n+1)}$. Voglio far vedere $B(z, 2^{-(n+1)}) \subset f^{-1}(A)$

ovvero basta mostrare che $\forall w \in B(z, 2^{-(n+1)}) \subset f^{-1}(A)$, $w \in f^{-1}(A)$

Quando $|w - z| \leq 2^{-(n+1)} \xrightarrow[\Delta]{} |w - y| < 2^{-n}$: $w \in B(y, 2^{-n}) \subset f^{-1}(A)$

$\to B(z, 2^{-(n+1)}) \subset f^{-1}(A) \to B(y, 2^{-(n+1)}) \subset Y_{n+1}$

<u>Corollario</u> $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e sia $\mathcal{A}$ ricoprimento di X

$\Rightarrow \exists n : \alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset A$ per un qualche $A \in \mathcal{A}$

<u>Dim</u>: dobbiamo dimostrare che $\forall [\alpha]$ in $\pi_1(X, x_0)$
[VK] esistono $\beta_i \in \Omega(A, x_0, x_0) \cup \Omega(B, x_0, x_0) \quad i = 1, \dots, n$

t.c. $\alpha \sim \beta_1 * \beta_2 * \dots * \beta_n$

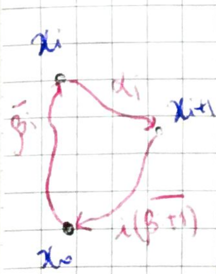
Per il corollario a Lebegue $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$\alpha_i := \alpha\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \subset A$ o $B \quad \forall\, i \in [1, \dots, n]$

$\Rightarrow$ sia $x_i = \alpha(i/n)$ e sia $\alpha_i \in \Omega(A, x_i, x_{i+1}) \cup \Omega(B, x_i, x_{i+1})$

Li devo rendere di cappi in $\Omega(A, x_0) \cup \Omega(B, x_0)$:

$\forall i \; \exists\, \bar{\beta}_i \in \Omega(X, x_0, x_i)$ t.c. $[\beta_0 \cdot \beta_{n+1} \cdot id]$



- $x_i \in A \cap B \longrightarrow \bar{\beta}_i \in \Omega(A \cap B, x_0, x_i)$
- $x_i \in A \setminus B \longrightarrow \bar{\beta}_i \in \Omega(A, x_0, x_i)$
- $x_i \in B \setminus A \longrightarrow \bar{\beta}_i \in \Omega(B, x_0, x_i)$

// perché sono CONNESSI PER ARCHI

$\Rightarrow \beta_i = \bar{\beta}_i * \alpha_i * i(\bar{\beta}_{i+1}) \in \Omega(A, x_0) \cup \Omega(B, x_0)$ per costr.

$\to \beta_1 * \dots * \beta_n = \alpha_1 * \dots * \alpha_n \sim \alpha$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "f"] & \\
A\cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\
 & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\longrightarrow
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A) \arrow[dr, "f_*"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(X) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & G \\
 & \pi_1(B) \arrow[ur, "g_*"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Lemma: Sia G un gruppo con omomorfismi $\varphi_1 : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow G$, $\varphi_2 : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow G$

$\Rightarrow \exists!\ \varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ che rende il diagramma commutat.

"Dim": Se esiste un tale φ allora necessariamente:

(1) $\varphi(f_*[\alpha]) = \varphi_1[\alpha]$
(2) $\varphi(g_*[\beta]) = \varphi_2[\beta]$

Ma allora $\forall [\gamma] \in \pi_1(X)\ \exists\ [\gamma_1], \dots, [\gamma_n] \in f^*(\pi_1(A)) \cup g^*(\pi_1(B))$ tale che $[\gamma] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \dots * [\gamma_n]$

$\Rightarrow \varphi([\gamma]) = \varphi[\gamma_1]\varphi[\gamma_2]\dots\varphi[\gamma_n]$ dove conosco $\varphi[\gamma_i]$ perché $\gamma_i \in f^*(\pi_1(A))$ o $\gamma_i \in g^*(\pi_1(B))$

Il teorema segue a patto di dimostrare che la def di φ è ben posta. (~)

* PRODOTTO LIBERO DI DUE GRUPPI

Siano G_1 e G_2 due gruppi e considero $\mathcal{G} = G_1 \setminus \{e_1\} \sqcup G_2 \setminus \{e_2\}$

Considero l'insieme delle parole di lunghezza $m \geq 0$ nell'alfabeto $\mathcal{G}$.

- Indico con e l'unica parola di lunghezza 0
- $g_1 \cdots g_m \in \mathcal{G}$ è una parola di $\mathcal{G}$.

Dico che $g, h \in \mathcal{G}$ sono equivalenti: $g \sim h \Leftrightarrow g, h \in G_1$ o $g, h \in G_2$

→ dico che una parola $g_1 \cdots g_m \in \mathcal{G}$ è ridotta se $g_i \nsim g_{i+1}\ \forall i$

$\Rightarrow G_1 * G_2 = \{$parole ridotte di $\mathcal{G}\}$

definiamo un prodotto in $G_1 * G_2$.

$$
(g_1 \cdots g_n)(h_1 \cdots h_m) = \begin{cases} g_1 \cdots g_n h_1 \cdots h_n & g_n \nsim h_1 \\ g_1 \cdots g_{n-1} (g_n h_1) \cdots h_n & g_n \sim h_1 \text{ e } g_n h_1 \neq e \\ (g_1 \cdots g_{n-1})(h_2 \cdots h_m) & g_n \sim h_1 \text{ e } g_n h_1 = e \end{cases}
$$

Con questo prodotto $G_1 * G_2$ è un gruppo con

- el neutro la parola vuota
- $(g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$

Abbiamo definito il gruppo libero $G_1 * G_2$

<u>Oss</u>: se $G_1 = \langle \underset{\substack{\nearrow \\ \text{generatori di } G_1}}{\mathcal{G}_1} \mid \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{relazioni fra gli el } \mathcal{G}_1 \text{ in } G_1}}{R_1} \rangle$ e $G_2 = \langle \mathcal{G}_2 \mid R_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$

<u>Esempi</u>: • $G_1 = G_2 \cong \mathbb{Z}$ con $G_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $G_2 = \{b^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\rightarrow G_1 * G_2 = \{a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \cdots a^{i_k} b^{j_k} \mid i_k, j_k \in \mathbb{Z}\}$

• $G_1 = G_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow G_1 * G_2 = \{abab\cdots a, abab\cdots b, bab\cdots a, bab\cdots b$

- PROPRIETÀ UNIVERSALE del PRODOTTO LIBERO

$\varphi_1 : G_1 \hookrightarrow G_1 * G_2$ e $\varphi_2 : G_2 \hookrightarrow G_1 * G_2$

$g \longmapsto \begin{cases} g & g \neq e_1 \\ e & g = e_1 \end{cases}$ $\qquad g \longmapsto \begin{cases} g & g \neq e_2 \\ e & g = e_2 \end{cases}$

per definizione di $G_1 * G_2$, sono omomorfismi

Allora per ogni gruppo H con omomorfismi

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend left, "\psi_1"] & & \\ & G_1 * G_2 \arrow[r, "\psi"] & H \\ G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] \arrow[urr, bend right, "\psi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

allora esiste un unico $\psi : G_1 * G_2 \longrightarrow H$ omomorfismo

Basta definire $\psi(g) = \begin{cases} \psi_1(g) & \text{se } g \in G_1 \\ \psi_2(g) & \text{se } g \in G_2 \end{cases}$ che si estende nel modo forzato

ovvero $\psi(g_1 \cdots g_n) = \psi(g_1) \cdots \psi(g_n)$ che conosco

• Il gruppo libero è l'unico gruppo che soddisfa la propr. universale

Più in generale posso definire il prodotto libero di una qualsiasi famiglia (finita) di gruppi $G_1, \ldots, G_n$

$\rightarrow G_1 * \cdots * G_n = \{\text{parole ridotte in } \bigcup G_i - \{e_i\}\}$

e nello stesso modo si definisce il prodotto

Anche la proprietà universale si estende:

$$\varphi_i : G_i \hookrightarrow G_1 * \cdots * G_n \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

Se H è un gruppo e $\psi_i : G_i \to H$ omomorfismi allora

$$\exists! \ \psi : G_1 * \cdots * G_n \longrightarrow H \ \text{ t.c. } \ \psi_i = \psi \circ \varphi_i \quad \forall i$$

<u>Def</u>: Dato $n \in \mathbb{N}$, il <u>gruppo libero di rango n</u> è

$$F_n := \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}} \quad \text{e} \quad F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

<u>Torniamo nelle ipotesi di Van Kampen</u>

X sp. topologico e $X = A \cup B$: $A, B, A \cap B$ connessi per archi e aperti e sia $x_0 \in A \cap B$. Allora:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "\varphi_A"] \arrow[drr, bend left, "f_*"] & & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "\psi_A"] & & \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \arrow[r, two heads, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[dr, "j_*"] \arrow[urr, "\psi_B"] & & & \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[uur, "\varphi_B"] \arrow[uurr, bend right, "g_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Oss 1</u>: h è surgettiva perché $\pi_1(X, x_0)$ è generato da

$$f_*(\pi_1(A, x_0)) = h(\varphi_A(\pi_1(A, x_0))) \in \operatorname{Im}(h)$$
$$g_*(\pi_1(B, x_0)) = h(\varphi_B(\pi_1(B, x_0))) \in \operatorname{Im}(h)$$

<u>Oss 2</u>: Sappiamo $f_* \circ i_* = g_* \circ j_*$ perché sono entrambi uguali a k_* con $k : A \cap B \longrightarrow X$.

<u>Oss 3</u>: $\ker(h)$ contiene tutti gli elementi della forma

$$\psi_A[\alpha] \, \psi_B[\alpha]^{-1} \ : \ [\alpha] \in \pi_1(A \cap B, x_0)$$

$[\alpha] \in \pi_1(A \cap B, x_0)$:

$$\begin{array}{ccc}
f_* i_* [\alpha] & = & g_* j_* [\alpha] \\
\| & & \| \\
h \varphi_A i_* [\alpha] & & h \varphi_B j_* [\alpha] \\
\| & & \| \\
h \psi_A [\alpha] & = & h \psi_B [\alpha]
\end{array}$$

$\rightarrow h(\psi_A[\alpha] \, \psi_B[\alpha]^{-1}) = e_H$

<u>Def</u>: Sia $N \subset \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)$ il sottogruppo normale generato da $\{\psi_A[\alpha]\,\psi_B[\alpha]^{-1} \mid [\alpha] \in \pi_1(A\cap B, x_0)\}$

Allora, per definizione di N otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "\bar\varphi_A"] \arrow[rr, bend left, "f_*"] & & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] \arrow[r, "\bar\psi_A = \bar\psi_B"] & \dfrac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{N} \arrow[rr, "\bar h"] & & \pi_1(X,x_0) \arrow[ll, bend left, dashed, "\varphi"] \\
 & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "\bar\varphi_B"'] \arrow[urr, bend right, "g_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

TEOREMA [di Van Kampen] N è proprio il nucleo di H, ovvero

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N}$$

dove $N = \langle\langle \psi_A[\alpha]\,\psi_B[\alpha]^{-1} \mid [\alpha] \in \pi_1(A\cap B,x_0) \rangle\rangle$

sottogr. normale generato da

<u>Dim</u>: Avevamo detto, la seguente proprietà: per ogni coppia di omomorfismi

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A,x_0) \arrow[d, "f_*"] \arrow[rd, bend left, "\xi_A"] & \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\xi"] & G \\
\pi_1(B,x_0) \arrow[u, "g_*"'] \arrow[ru, bend right, "\xi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

esiste un unico

$$\xi : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow G$$

che rende commutativo il diagramma

(dim non finita)

Nel nostro caso consideriamo $\xi_A = \bar\varphi_A$ e $\xi_B = \bar\varphi_B$ allora esiste un'unica $\varphi : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \dfrac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N}$ tale che

$$\bar\varphi_A = \xi \circ f_* \quad e \quad \bar\varphi_B = \xi \circ g_*$$

Vediamo che φ è un isomorfismo.

① OMOMORFISMO

② SURGETTIVO, infatti $\dfrac{\pi_1(A) * \pi_1(B)}{N}$ è generato da $\mathrm{Im}(\bar\varphi_A)$ e $\mathrm{Im}(\bar\varphi_B)$

$\mathrm{Im}(\bar\varphi_A) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\bar\varphi_B) \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$ perché $\bar\varphi_A = \varphi f_*$, $\bar\varphi_B = \varphi g_*$

$$\rightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = \frac{\pi_1(A) * \pi_1(B)}{N}$$

③ INIETTIVA: infatti abbiamo

$$\begin{cases} \bar\varphi_A = \varphi f_* \\ \bar\varphi_B = \varphi g_* \end{cases} \to \begin{cases} f_* = \bar h \bar\varphi_A = \bar h \varphi f_* \\ g_* = \bar h \bar\varphi_B = \bar h \varphi g_* \end{cases}$$

$\to \bar h \varphi|_{Im f_*} = id_{Im f_*}$ e $\bar h \varphi|_{Im g_*} = id_{Im g_*}$

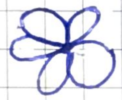
ma per V.K debole $\pi_1(X)$ è generato da $Im f_*$, $Im g_*$

$\to \bar h \varphi$ identità su $\pi_1(X) \longrightarrow \varphi$ iniettiva

Notazione: $\dfrac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N}$ è detto PRODOTTO AMALGAMATO e si denota $\pi_1(A,x_0) \underset{\pi_1(A\cap B,x_0)}{*} \pi_1(B,x_0)$

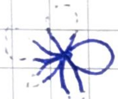
Esempi: (assumiamo $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$)

① Consideriamo un BOUQUET di n CIRCONFERENZE: quale è il suo π_1?

 $= X$

Mostriamo che $\pi_1(X^n) \cong F_n$ per induzione:

P.B: $n=1 \to \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ✓

P.I: considero $A =$  e $B =$  ; $A \cap B =$ 

$\to X = A \cup B$ con A, B, $A\cap B$ connessi per archi

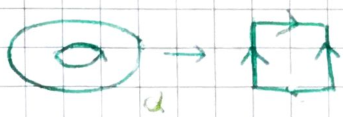
① $A \cap B$ contrattile $\to \pi_1(A\cap B) = 0$

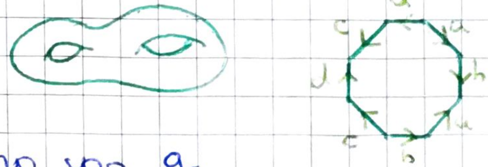
$$\to \pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0) \cong F_n$$

$$\pi_1(A,x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}) \cong F_{n-1} \qquad \pi_1(B,x_0) \cong \pi_1(X^1) \cong \mathbb{Z}$$

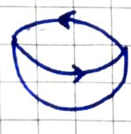
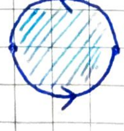
② $X^{(n)} = \mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$ si retrae sul Bouquet di n circ. (esercizio)

$\to \pi_1(X^{(n)}) \cong F_n$

③ - TORO $\to$ come $\pi_1(\quad) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 

- "TORO" a g buchi ? 

In generale otteniamo un toro con g buchi da un quadrato a 4g lati

④ $P^2(\mathbb{R}) \cong$  $\cong$ 

$f \; X \to Z$ identificazione.

Supponiamo $R: X \times [0,1] \to X$ deformazione su Y posso indurre da R una deformazione $\overline{R}: Z \times [0,1] \to Z$ su $f(Y)$?

In generale NO. Vediamo condizioni affinché sia possibile.

(1)
$$\begin{tikzcd}
X \times [0,1] \arrow[r, "R"] \arrow[d, "f \times id"'] \arrow[dr, "f \circ R"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, dashed] & Z
\end{tikzcd}$$

⚠ In generale $f \times id$ NON è una identificazione

<u>Lemma</u>: Se $f: X \to Z$ identificazione, Y loc. cmpt e di Hausdorff

[cfr COR 5.27] $\Rightarrow f \times id: X \times Y \to Z \times Y$ è identificazione

Ma quindi nel diagramma (1), poiché $[0,1]$ loc. cmpt e T2, $f \times id$ è una identificazione. Allora:

$$\boxed{R \text{ passa al quoziente} \iff f \circ R \text{ è costante sulle fibre di } f \times id \;\bullet}$$

In questo caso: $\exists\, \overline{R}: Z \times [0,1] \to Z$ che fa commutare il diagramma:

ovvero $\overline{R}$ tale che $\overline{R}(f(x), t) = f(R(x,t))$

Supponiamo ad esempio che $f^{-1}(f(x)) \neq \{x\} \iff x \in Y$

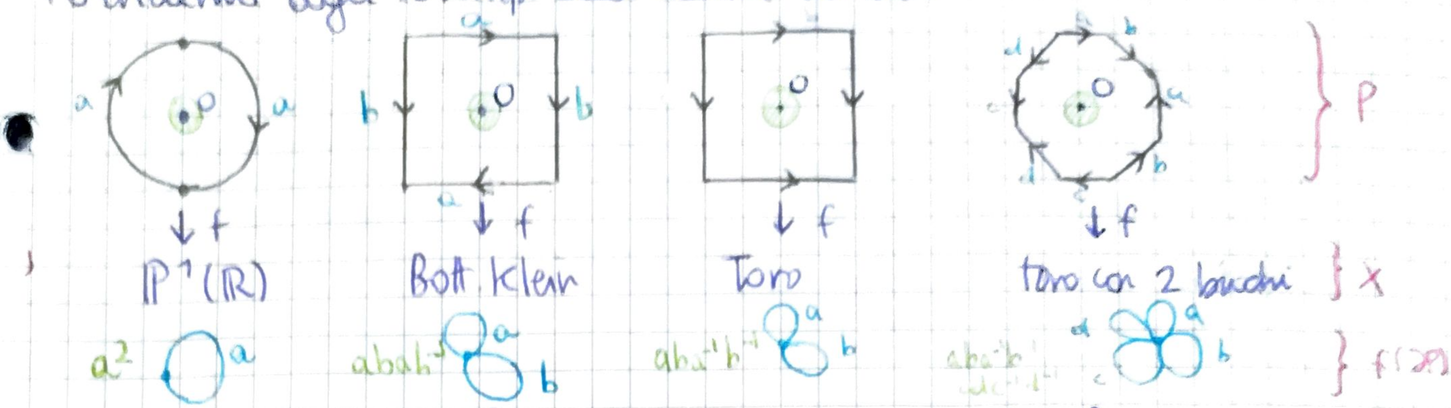
Allora vale $\bullet$ e R passa al quoziente:

$$\left.\begin{array}{l} x \neq y \in X \text{ t.c. } f(x) = f(y) \Rightarrow x, y \in Y \\ \text{quindi } f(R(x,t)) \underset{x \in Y}{=} f(x) = f(y) \underset{y \in Y}{=} f(R(y,t)) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f \circ R \text{ costante sulle} \\ \text{fibre di } f \times id \end{array}$$

Dunque in questo caso $\exists\, \overline{R}: Z \times [0,1] \to Z$ deformazione di Z su $f(Y)$.

Se vale $\bullet$: data una identificazione $f: X \to Z$
e una deformazione $R: X \times [0,1] \to X$,
la deformazione passa al quoziente tramite f
e ottengo $\overline{R}: Z \times [0,1] \to Z$.

Torniamo agli esempi dell'altra volta:



Sia P il poligono, il centro O e sia $O \in D \subset P$ un disco centrato in O.

Prendiamo $A = f(P \setminus \{O\})$ e $B = f(D)$: allora valgono

- A, B connessi per archi, $A \cap B$ connesso per archi
- $X = A \cup B$

Considero $x_0 \in A \cap B$:

banale [B sempl. connesso]

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{\ll \psi_A[\alpha]\psi_B[\alpha]^{-1} \mid [\alpha] \in \pi_1(A \cap B) \gg}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A) \arrow[dr, "\varphi_A"] & & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "i_A^*"] \arrow[rr, "\psi_A = \psi_B"] \arrow[dr, "i_B^*"'] & & \dfrac{\pi_1(A) * \pi_1(B)}{N} & = \dfrac{\pi_1(A)}{\ll i_A^*[\alpha] \mid [\alpha] \in \pi_1(A \cap B) \gg} \\
 & \pi_1(B) \arrow[ur, "\varphi_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

vedi diagrammino VK:
$\pi_1(A) \cong \pi_1(A) * \pi_1(B)$
$\to \psi_A = \varphi_A \, i_A^* \simeq i_A^*$

Devo studiare $\pi_1(A)$.
Vorrei trovare una retrazione per def $R: P \setminus \{O\} \times [0,1] \to P \setminus \{O\}$ sul bordo (e questa so che esiste)

Allora (come ↺)

$$\begin{tikzcd}
P \setminus \{O\} \times [0,1] \arrow[r, "R"] \arrow[d, "f \times id"'] & P \setminus \{O\} \arrow[d, "f"] \\
A \times [0,1] \arrow[r, "\overline{R}"] & A
\end{tikzcd}$$

perché $f(x) = f(y) \iff x, y \in \partial P$

Quindi troviamo $\overline{R}: A \times [0,1] \to A$ def di A su $f(\partial P)$ - forma - presentazione

Com'è fatto?

	$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	Klein	Toro	Toro 2 buchi	Toro g buchi
π_1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g}$
	$= \langle a \rangle$	$= \langle a, b \rangle$	$\langle a, b \rangle$	$= \langle a, b, c, d \rangle$	$= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle$

Osserviamo che anche $\pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle$ dove $\alpha \in D$ è un cammino attorno allo 0.

Chi è $i_A^*[\alpha]$?

α si retrae verso il bordo del poligono, quindi l'immagine di α con i_A^* è il ∂P percorso come abbiamo discusso.

	$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$	Klein	Toro (norm.)	Toro con g buchi
$\pi_1(A)$	$\mathbb{Z} = \langle a \rangle$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g} = \langle a_i, b_i \rangle$
$i_A^*(\alpha)$	a^2	$abab^{-1}$	$aba^{-1}b^{-1}$	$\prod a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$
$\pi_1(X)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$	$\langle a, b \mid abab^{-1} = 1 \rangle$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$	$\langle a_i, b_i \mid \prod a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1 \rangle$

* RIVESTIMENTI

X spazio topologico. Un'applicazione continua $p: E \to X$ è detta RIVESTIMENTO se $\forall x \in X$ $\exists U \ni x$ aperto t.c.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \quad \text{unione disgiunta di aperti di } E$$

tale che $p|_{V_i}: V_i \to U$ omeomorfismo $\forall i$

Terminologia: - gli aperti come U sono detti BANALIZZANTI, X è detto BASE del rivestimento, ed E spazio totale

- se E è connesso $\Rightarrow$ rivestimento connesso
- se X aperto banalizzante $\Rightarrow$ rivestimento banale.

es: F sp. topologico con topologia discreta: $p: X \times F \to X$, $(x, f) \mapsto x$

$\Rightarrow$ p è un rivestimento banale:

e p è connesso $\Leftrightarrow$ $|F| = 1$ $\Leftrightarrow$ p omeomorfismo

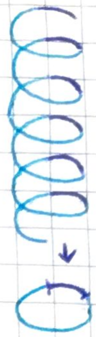
Oss: se U è un aperto banalizzante di $p: E \to X$, $x_0 \in U$

$\Rightarrow$ $p^{-1}(U) \approx U \times {}^{-1}(x_0)$

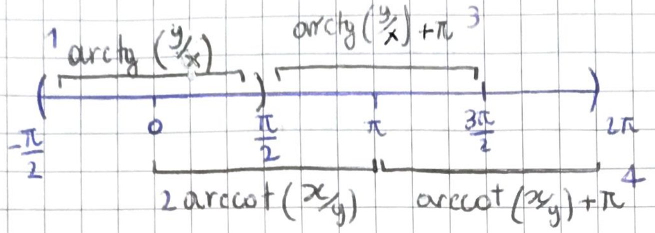
Dunque: $p|_{p^{-1}(U)} \to U$ è un rivestimento banale.

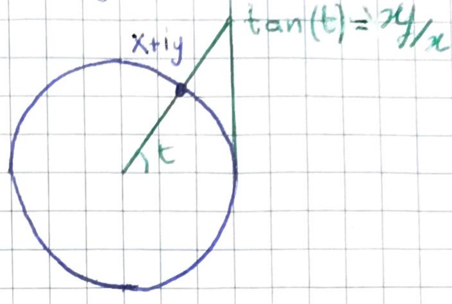
(↑ su questo ci torniamo.
In particolare troviamo che la fibra di p è sempre discreta)

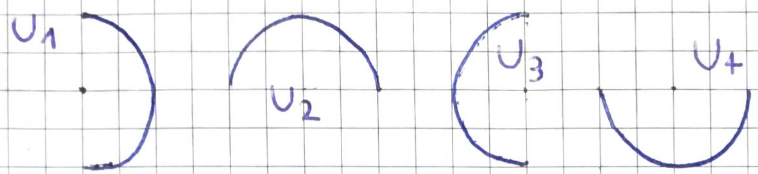
ESEMPIO: $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ è un RIVESTIMENTO
$\quad t \mapsto e^{it}$



- ~~per~~ ogni arco di circonferenza ha come preimmagine intervalli disgiunti di $\mathbb{R}$
- cerco un'inversa







sono aperti banalizzanti

$\to p^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{V_{1,k}}$

e $p|_{V_{1,k}}$ ha come inversa $q_{1,k}: U_1 \longrightarrow V_{1,k}$
$\quad (x+iy) \longmapsto \arctan(y/x) + 2k\pi$

Ancora sui rivestimenti [Caput.] 03/14

- $p: \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{it}$ abbiamo visto che ammette inverse locali

In realtà si possono organizzare meglio gli ap. banalizzanti

$$Arg_+ : S^1 \longrightarrow [0, 2\pi)$$

Argomento principale

$$z = x+iy \mapsto \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & x>0 \ y>0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) & y>0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & x<0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) + \pi & x>0 \ y<0 \end{cases}$$

osserviamo che non è continua, ma lo è $Arg_+|_{S^1 \setminus \{(1,0)\}}$

$$Arg_- : S^1 \longrightarrow [-\pi, \pi)$$

$$z = x+iy \mapsto \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & x>0 \ y>0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) & x<0 \ y>0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & x<0 \ y<0 \\ \operatorname{arccot}(x/y) - \pi & x>0 \ y<0 \end{cases}$$

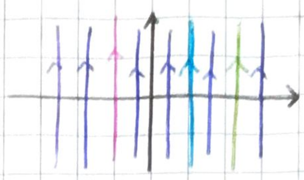
non è continua ma lo è $Arg_-|_{S^1 \setminus \{(-1,0)\}}$

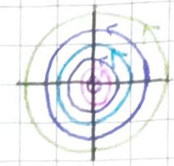
$\to V_k = (k\pi, (k+2)\pi)$ e $p|_{V_k}: V_k \to p(V_k)$ omeomorfismo con inversa

$$q_k = \begin{cases} Arg_+(z) + k\pi & 2 \mid k \\ Arg_-(z) + (k-1)\pi & 2 \nmid k \end{cases}$$

Altri esempi:

① su $\mathbb{C}$: $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$
$\quad x+iy = z \mapsto e^x(\cos y + i \sin y)$





manda rette // asse y in circ di centro O

Considero $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \times (2k\pi, 2(k+1)\pi)$

$\rightarrow p|_{\mathbb{R} \times (2k\pi, 2(k+1)\pi)}$ ha inversa $q_k(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}_+\left(\frac{z}{\|z\|}\right) + 2k\pi$

<u>DEF</u>: logaritmo complesso

e $p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \times ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$

$\rightarrow p|_{\mathbb{R} \times ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)}$ ha inversa $q_k(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}_-\left(\frac{z}{\|z\|}\right) + (2k-1)\pi$

② ESER. $p : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ e $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$

③ $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq S^n/\{\pm 1\}$

Per ogni $x \in S^n$ voglio trovare $[x] \in U \subset \mathbb{P}^n$ aperto banalizzante

Sia $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ lineare t.c. $\varphi(x) \neq 0$
(dim ker $\varphi = n$)

$\rightarrow S^n \setminus \{\varphi = 0\} \overset{(\bullet)}{=} S_n^+ \sqcup S_n^-$
unione di due calotte aperte (simmetriche rispetto ad O)

Allora: $U = p(S_n^+) = p(S_n^-) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ aperto perché $p^{-1}(U)$ è un aperto saturo in S^n.

$\Rightarrow U$ ap banalizzante con $p^{-1}(U) = S_n^+ \sqcup S_n^-$

e $p|_{S_n^+} : S_n \to U$, $p|_{S_n^-} : S_n \to U$ sono omeomorfismi

$\rightarrow p$ è un rivestimento

<u>Def</u>: $f : X \to Y$ continua è omeomorfismo locale se

$\forall x \in X \ \exists\, x \in A, f(x) \in B$ aperti t.c. $f|_A : A \to B$ omeomorf.

<u>Oss</u> (•) $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ e $p|_{V_i} : V_i \to U$ omeomorfismo

$\rightarrow \forall x \in U \ \exists!\, v_i \in V_i : p(v_i) = x$ e inoltre $p^{-1}(x) \subset \bigsqcup V_i$

$\rightarrow |p^{-1}(x)| = |I| \quad \forall x \in U$ ← mi dice che in (•) devo cercare 2 aperti

Prop: Sia $f: X \to Y$ omeomorfismo locale allora f è APERTA e le fibre di f (con la top indotta) sono sottospazi discreti di X.

Dim: - Vediamo che f è APERTA:

Sia $U \subset X$ aperto: $y \in f(U)$; $\exists\, x \in U$ t.c. $y = f(x)$

omeo loc. $\Rightarrow \exists\, x \in A \subset X$ aperto, $B = f(A)$ t.c. $f|_A : A \xrightarrow{\approx} B$

$\Rightarrow x \in A \cap U$ aperto $\to f(A \cap U) \subset B$ aperto e B aperto

$\to \underset{f(U)}{f(A \cap U)}$ aperto in Y e intorno di y } $f(U)$ contiene un intorno di ogni suo pt

- Vediamo che le fibre sono discrete, sia $y \in f(X)$.

$\forall x \in f^{-1}(y)$, trovo (via omeo locale) un aperto $A \ni x$ tale che $A \cap f^{-1}(y) = \{x\}$ ($f|_A$ iniett.)

$\Rightarrow x$ è aperto in $f^{-1}(y)$.

Prop: Sia $p: E \to X$ rivestimento e X connesso

① p omeomorfismo locale ($\Rightarrow$ aperto e fibre discrete)

② tutte le fibre di p hanno la stessa cardinalità.

③ $\forall Y \subset X$ connesso $p|_{p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ è un rivestimento

Dim: ① È quasi immediato: infatti X è ricoperto da aperti banalizzanti quindi $\forall e \in E\ \exists V \subset E$ t.c. V ap. intorno di e, e $p(V)$ ap. banalizzante.

② Sia $x_0 \in X$: $X_1 = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\} \ni x_0$
$X_2 = \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|\}$

serve X connesso

$\Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ma X connesso, quindi se sono entrambi aperti, necessariamente $X_1 = X$.

Dimostriamo che sono aperti:

- $U \subset X$ banalizzante $\overset{(\circ)}{\Rightarrow} |p^{-1}(x)|$ è costante al variare di $x \in U$

- $x \in X_1 \Rightarrow x \in U$ aperto banalizzante $\Rightarrow \forall y \in U,\ |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|$

X_1 aperto $\leftarrow U \subset X_1$

- $x \in X_2 \Rightarrow x \in U$ ap. banalizzante $\Rightarrow \forall y \in U,\ |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|$

X_2 aperto $\leftarrow U \subset X_2$

③ Sia $y \in Y$, sia $y \in U \subset X$ aperto banalizzante $\to U \cap Y$ è aperto banalizzante per $p|_{p^{-1}(Y)}$

Def: Sia $p: E \to X$ un rivestimento allora il grado di p è $|p^{-1}(x)|$

Esempi: 1 - $p: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rivestimento di grado 2.

2 - $\begin{array}{ccc} S^n & \to & S^n \\ z & \mapsto & z^k \end{array}$ e $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^k \end{array}$ rivestimenti di grado n

3 - $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & S^1 \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ e $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & & e^z \end{array}$ rivestimento di grado numerabile

Ricordiamo: AZIONI PROP. DISCONTINUE

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (g, x) & & (x, gx) \end{array}$$ continua e prop. discontinua se

$$\forall x \in X \; \exists x \in U : \; (U|U)_G = \{1_G\}$$

Oss: azione prop. discontinua $\Rightarrow$ libera ($\forall x \in X \quad gx = x \Leftrightarrow x = e$)

Prop: $G \circlearrowright E$ propriamente discontinua t.c. $X = E/_G$ connesso
Allora:

$$p: E \twoheadrightarrow X \text{ rivestimento di grado } |G|$$

Dim: Siano $e \in E$, $e \in U$ aperto $\Rightarrow$ $gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{e\}$ (1)
Mostriamo che $p(U)$ è un aperto banalizzante.

① $p(U)$ aperto perché $p(U) = p\Big(\underbrace{\bigcup_{g \in G} gU}_{\text{aperto saturo}}\Big)$

② $p^{-1}(p(U)) = \bigsqcup_{g \in G} gU$ $\leftarrow$ aperti disgiunti (1) allora:

$p|_{gU} \quad gU \to p(U) = p(gU)$ è aperta (perché p aperta) e surgettiva

Vediamo che è anche iniettiva:

$gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \neq e \rightarrow x \in U, h \in G$ t.c. $gx, hx \in gU$

ma $gU \cap hU = g(\underbrace{U \cap g^{-1}hU}_{\neq \emptyset \Leftrightarrow g^{-1}h = e}) \neq \emptyset \rightarrow h = g$

$\rightarrow p|_{gU}$ omeomorfismo.

esempi: $S^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/_{\mathbb{Z}}$ $\qquad \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$

$nz = z + 2\pi n i$

* SOLLEVAMENTO DI APPLICAZIONI

$p : E \to X$ rivestimento e $f : Y \to X$ continua.
un sollevamento di f a E è $g : Y \to E$ continua t.c.

$= p \circ g$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Ci interessano i casi
- $f : [0,1] \to X$ cammino
- $f : [0,1] \times [0,1] \to X$ omotopia di cammini

Prop [UNICITÀ DEL SOLLEVAMENTO]

Sia $p : E \to X$ un rivestimento, $f : Y \to X$ continua, Y connesso
$\forall\, y_0 \in Y,\ e_0 \in E$ con $p(e_0) = f(y_0)$, esiste al più un sollevamento g di f tale che $g(y_0) = e_0$.

Dim: Siano g, h due sollevamenti di f ad E, che rispettano $\mathfrak{J}$.

$\to$ Consideriamo $A = \{ y \mid g(y) = h(y) \} \ni y_0$
$B = \{ y \mid g(y) \neq h(y) \}$

e sicuramente $Y = A \cup B$ ma Y connesso.
$\Rightarrow$ se dimostro che A e B sono aperti $\to A = Y \to g = h$.

* A aperto: sia $y \in A \to g(y) = h(y) = e$.
Poiché p è un rivestimento, esiste $V \subset E$ aperto tale che $e \in V$ e t.c. $p|_V : V \to p(V)$ omeomorfismo con un aperto di X

$g^{-1}V \cap h^{-1}V$ intorno di y in A

$\Big\{$ Ma allora $y \in g^{-1}(V) \cap h^{-1}(V)$ che è aperto
Vediamo che h e g coincidono su $g^{-1}(V) \cap h^{-1}(V)$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, shift left, "p"] \\ g^{-1}(V) \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & p(V) \arrow[u, shift left, "q"] \end{tikzcd}$$

$g^{-1}(V) = f^{-1}(p(V))$

Sia $q : p(V) \to V$ inverso di $p|_V$.
Allora basta osservare che se $z \in g^{-1}(V) \cap h^{-1}(V)$
$\Rightarrow g(z) = q(f(z)) = h(z)$

* B aperto: sia $y \in B \to g(y) \neq h(y)$ ma $p(g(y)) = p(h(y)) = f(y)$

Sia $f(y) \in U$ aperto banalizzante con $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$
con V_i aperti in E, $p|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\sim} U$ omeo.

Allora $p(g(y)) = p(h(y)) \in U \to$ wlog $g(y) \in V_1$
$h(y) \in V_2$

$g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2)$ intorno di $y \in B$.

$\Bigg\{$ Quindi $g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2) \ni y$:
e $\mathrm{Im}(g|_{g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2)}) \subset V_1$
$\mathrm{Im}(h|_{g^{-1}(V_1) \cap h^{-1}(V_2)}) \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ✓

es: in generale non è detto che esistano sollevamenti

Considero

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "id"'] & S_1 \end{tikzcd}$$

se esiste $g: S_1 \to \mathbb{R}$ sollevamento:

$p(g(x)) = x \quad \forall x \in S_1$

$\to g$ iniettiva

Allora $g: S_1 \hookrightarrow \mathbb{R}$ e S_1 compatto e connesso

$\Rightarrow g(S_1) = [a,b] \subset \mathbb{R}$

$\to \bar{g}: S_1 \to [a,b]$ invertibile da un compatto a un T2 → chiusa

$\Rightarrow \bar{g}$ omeomorfismo ma $S_1 \not\cong [a,b]$ (hanno π_1 diversi)

Prop: [SOLLEVAMENTO DI CAMMINI]

$p: E \to X$ rivestimento e $\alpha: [0,1] \to X$ cammino.
Sia inoltre $e \in E$ tale che $p(e) = \alpha(0)$.

$\Rightarrow \exists!\ \alpha_e: [0,1] \to E$ cammino con $\alpha = p(\alpha_e)$ e $\alpha_e(0) = e$

Dim: Dobbiamo far vedere l'esistenza.
Per il teorema di Lebesgue, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall i \quad \alpha\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) \subset U_i$ per qualche aperto banalizzante di X

Definiamo per ricorrenza

(*) $\gamma_i: \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to E$ continua t.c. $p(\gamma_i(x)) = \alpha(x)$
ed inoltre $\gamma_i\left(\frac{i}{n}\right) = \gamma_{i-1}\left(\frac{i}{n}\right)$

e tale che $\gamma_0(0) = e$

A questo punto basta definire $\alpha_e(x) = \gamma_i(x) \quad \forall x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$
e [ricoprimento fondamentale] → è un sollevamento

Dimostriamo (*):

- γ_0: guardo $p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} V_i^{(0)}$ e wlog $e \in V_1^{(0)}$

  $\Rightarrow$ sia $q_0: U_0 \to V_1^{(0)}$ inverso di $p|_{V_1^{(0)}}$

  Allora definiamo $\gamma_0 = q_0 \circ \alpha|_{[0, 1/n]}$ è continuo, $\gamma_0(0) = e$

- se ho definito γ_i posso definire γ_{i+1} in modo che:

  $p^{-1}(U_{i+1}) = \bigsqcup_{j \in I} V_j^{(i+1)}$ e wlog $\gamma_i\left(\frac{i+1}{n}\right) \in V_1^{(i+1)}$

  e trovo $q_{i+1}: U_{i+1} \to V_i^{(i+1)}$ e $\gamma_{i+1} = q_{i+1} \circ \alpha|_{\left[\frac{i+1}{n}, \frac{i+2}{n}\right]}$

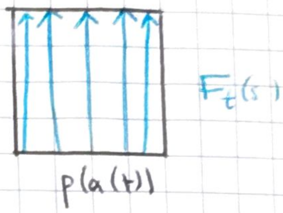
Teo [sollevamento dell'omotopia]

$p: E \to X$ rivestimento e $\alpha: [0,1] \to E$ cammino.
Sia $F: [0,1]\times[0,1] \to X$ un'omotopia t.c. $F(t,0) = p(\alpha(t))$

$\Rightarrow \exists!\ G: [0,1]\times[0,1] \to E$ omotopia t.c. $G(t,0) = \alpha(t)$.

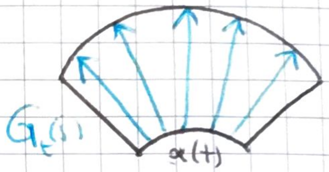
Dim: Vediamo l'esistenza

Supponiamo t fissato: $F_t: [0,1] \to X$ cammino tale che $F_t(0) = F(t,0) = p(\alpha(t))$.



$\xrightarrow{\text{sollevamento dei cammini}}$ $\exists\ G_t: [0,1] \to E$ cammino t.c. è un sollevamento di F_t e $G_t(0) = \alpha(t)$

Quindi troviamo:



$$G: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow E$$
$$(t,s) \longmapsto G_t(s)$$

e sicuramente $G(t,0) = G_t(0) = \alpha(t)$. Basta che dimostri che G è continua.

Sia $R = [0,1]\times[0,1]$, allora $F(R)$ compatto in $X = \bigcup_{\text{ap. banalizz.}} U_i$

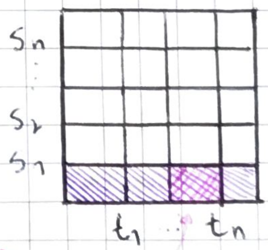
$\Rightarrow \exists\ U_1, \dots, U_N$ aperti banalizzanti t.c. $F(R) \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$

[TEO NUM. LEBEGUE] $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n < s_{n+1} = 1$ t.c.

$$F(\overbrace{[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]}^{R_{i,j}}) \subset U_{i,j} \quad \text{dove } U_{i,j} \in \{U_1, \dots, U_N\}$$

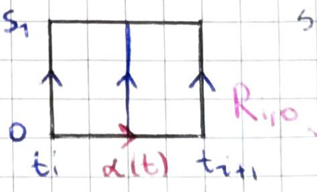
Mostriamo p.i. $G_j: [0,1]\times[0,s_j] \longrightarrow E$ è continua con $G_j = G|_{[0,1]\times[0,s_j]}$

- Cominciamo da $G_1 = G|_{[0,1]\times[0,s_1]}$:



• mostriamo $G|_{R_{i,0}}$ continua

$G_t(s)$ sollevamento di $F_t(s)$ e t.c. $G_t(0) = \alpha(t)$



- Abbiamo $G(R_{i,0})$ connesso per archi perché unione di cammini incidenti ad $\alpha(t)$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{V}_{1,0} \\ R_{i,j} \arrow[ur, "G"] \arrow[r] & U_{1,0} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$G(t,s) = G_t(s) =$
$=$

- Sappiamo $F(R_{i,0}) \subset U_{i,0}$ aperto banalizzante
$\rightarrow p^{-1}(U_{i,0}) = \bigsqcup V_{i,0,j}$ ed esiste $\tilde{V}_{i,0} \supseteq G(R_{i,j})$

dato $q_{i,0}: U_{i,0} \to \tilde{V}_{i,0}$ inverso di $p|_{\tilde{V}_{i,0}}$

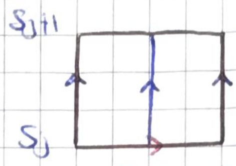
allora (come sempre) deve essere $G|_{R_{i,0}} = q_{i,0} \circ F|_{R_{i,0}}$
ovvero $G|_{R_{i,0}}$ continua

• $[0,1]\times[0,s_1] = \bigcup_{i=1}^{n} R_{i,0}$ ric. fondamentale
$\rightarrow G_1$ continua

- Sia G_j continua $\to$ G_{j+1} continua

- $S_{j+1} = S_j \cup \bigcup_{i=1}^{n} R_{i,j}$ e mostriamo $G|_{R_{i,j}}$ continua

Esattamente come prima dimostro che $G|_{R_{i,j}}$ continua



$G(t, S_j)$ continua per ip induttiva

- Ric fondamentale,

$G|_{S_{j+1}}$ continua [ric $S_j \cup \bigcup R_{i,j}$]

Cor [do $\exists!$ sollevamento omotopie] 03/20

$p: E \to X$ rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, $e \in p^{-1}(a)$. Siano α_e, β_e sollevamenti di α, β da $[0,1] \longrightarrow E$, $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$ allora sono equivalenti:

1. α, β omotopi
2. $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e α_e, β_e omotopi

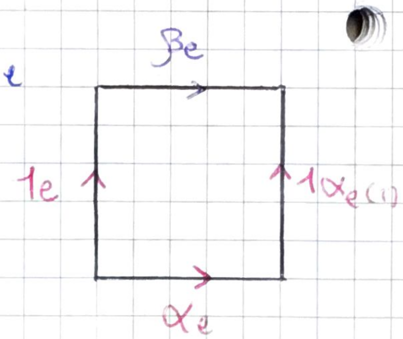
Dim: (1) $\Rightarrow$ (2) Sia $F: [0,1] \times [0,1] \to X$ omotopia di cammini fra α, β ovvero $\begin{cases} F(t,0) = \alpha(t) \\ F(t,1) = \beta(t) \end{cases}$, $\begin{cases} F(0,s) = a \\ F(1,s) = b \end{cases}$ $\forall t, s$

Per il TEO sull' ~~unicità~~ esistenza del sollevamento di omotopie applicato ad F e al cammino α

$\Rightarrow \exists!\ G: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$ tale che $F = p \circ G$ e $G(t,0) = \alpha_e(t)$

Vediamo che G è omotopia fra α_e, β_e: infatti

- $G(0,s) = e \quad \forall s$ (perché $p(G(0,s)) \equiv a$, quindi G_0 è un sollevamento di pt iniziale e di un cammino costante $\xrightarrow{\text{unicità soll. cammini}}$ $G(0,1) = e$)



- $G(1,s) = 1_{\alpha_e(1)}(s) \equiv \alpha_e(1)$
- $p(G(t,1)) = F(t,1) = \beta(t)$ e $G(0,1) = e$

$\Rightarrow$ $G(t,1)$ è l'unico sollevamento di $\beta(t)$ con dato iniziale $G(0,1) = e$ $\longrightarrow G(t,1) = \beta_e(t)$

(2) $\Rightarrow$ (1) Se α_e e β_e (con gli stessi estremi) sono omotopi e G omotopia fra α_e e β_e

$\Rightarrow p \circ G = F$ è omotopia fra α e β in X

Cor: $p: E \to X$ rivestimento, $e_0 \in E$, $x_0 = p(e_0)$. Allora
$$p_* : \pi_1(E, e_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$$
è un omomorfismo iniettivo

Dim: sia $\alpha \in \Omega(E, e_0, e_0)$ e supponiamo $[p\alpha] = [1_{x_0}]$
Allora per il cor (*) applicato ai cammini su $(p\alpha, 1_{x_0})$ e $\begin{cases} \widetilde{p\alpha}_{e_0} = \alpha \\ \widetilde{(1_{x_0})}_{e_0} = 1_{e_0} \end{cases}$
abbiamo che, poiché $p\alpha \sim 1_{x_0}$
allora $\alpha \sim 1_{e_0} \Longrightarrow \ker(p_*)$ banale $\to p_*$ iniettivo

Cor: $p: E \to X$ con E connesso per archi t.c. X è sempl. connesso
$\Longrightarrow p$ è un omeomorfismo $(E \cong X)$

Dim: Per definizione ($\simeq$) p è aperta e surgettiva. Quindi basta vedere che è iniettiva.

Siano $e, f \in E$ t.c. $p(e) = p(f) = x$. Sia $\alpha \in \Omega(E, e, f)$
$\Longrightarrow p(\alpha) \in \Omega(X, x, x)$, e per ipotesi $[p\alpha] = [1_x]$

Per il cor (*) su $p\alpha$ e 1_x: l'estremo finale di $\alpha = \widetilde{(p\alpha)}_e$ dipende solo da $[\alpha] \underset{\text{cor}}{=} [\widetilde{(1_x)}_e] = [1_e]$
ovvero $\alpha \in \Omega(E, e, e)$

Cor: S^1, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^*$ <u>non</u> sono semplicemente connessi
(Abbiamo trovato rivestimenti connessi per archi che non sono omeomorfismi)

- MONODROMIA DI RIVESTIMENTI

Sia $p: E \to X$ rivestimento, $x, y \in X$ allora definiamo
$$\mathrm{Mon}_{x,y}: p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \longrightarrow p^{-1}(y)$$
$$(e, \alpha) \longmapsto \widetilde{\alpha}_e(1)$$

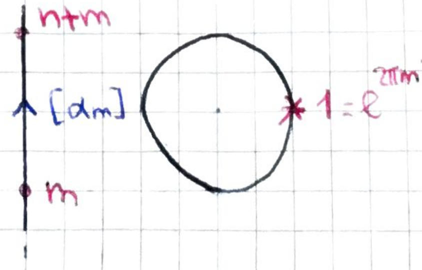
Abbiamo già visto che $\widetilde{\alpha}_e(1)$ dipende solo da $[\alpha]$ dunque l'operazione passa al quoziente $\Omega(X, x, y)/\sim$

In particolare se $x = y$ troviamo $p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$
$$(e, [\alpha]) \longmapsto e \cdot [\alpha]$$
Questa è un'<u>azione destra</u> di $\pi_1(X, x)$ su $p^{-1}(x)$

<u>es</u>: Sia $p: \underset{t}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{e^{it}}{S^1}$ e considero $p^{-1}(1) \times \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow p^{-1}(1)$

Ora $p^{-1}(1) = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha_n \in \Omega(S^1, 1, 1)$ $\alpha_n(t) = e^{n2\pi i t}$

Guardiamo $(2\pi n) \cdot [\alpha_m] = 2\pi(n+m)$

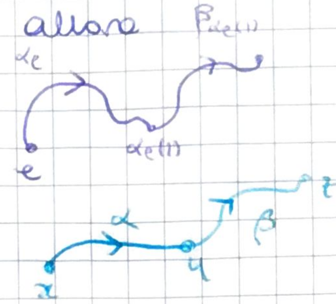


Facciamo vedere che $p^{-1}(x)\times \pi_1(X,x) \longrightarrow p^{-1}(x)$

$(e,[\alpha]) \longmapsto e.[\alpha]$ — α applicato ad e

è un'AZIONE,
mostrando proprietà generali di $\mathrm{Mon}_{x,y}$

(1) $\alpha\in\Omega(X,x,y)$, $\beta\in\Omega(X,y,t)$ $\Rightarrow$ $\alpha*\beta\in\Omega(X,x,t)$ allora



$$(\alpha*\beta)_e = \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}$$

da cui $(\alpha*\beta)_e(1) = \beta_{\alpha_e(1)}(1)$

$\rightarrow$ $e.[\alpha*\beta] = \alpha_e(1).[\beta] = (e.[\alpha]).[\beta]$

[$x=y$ $\rightarrow$ ricavo l'associatività dell'azione]

(2) $1_x\in\Omega(X,x,x)$ su $e\in p^{-1}(x)$: $(1_x)_e(1)=e$

$\Rightarrow$ $e.[1_x]=e$ azione banale

[$x=y$ $\rightarrow$ ricavo che $p^{-1}(x)\times\pi_1(X,x)\longrightarrow p^{-1}(x)$ è un'azione destra]

Anche nel caso $x\neq y$ segue che:

$$p^{-1}(x) \xrightarrow{.[\alpha]} p^{-1}(y) \xrightarrow{.[i(\alpha)]} p^{-1}(x) \Rightarrow (e.[\alpha]).[i(\alpha)] = e$$

$$e.[\alpha*i(\alpha)] = e.[1_x]$$

Ricordiamo: AZIONI DI GRUPPI SX [dx analoghe]

Sia $G\times T\longrightarrow T$ azione sinistra, vale a dire

*) $g\cdot(h\cdot t) = (g*h).t$ $\quad\forall g,h\in G,\ t\in T$

*) $e_G\cdot t = t$ $\quad\forall t\in T$

- $\mathrm{Stab}(t) = \{g\in G \mid gt=t\}$ e $\mathrm{Orb}(t) = \{gt \mid g\in G\}$
- L'azione si dice TRANSITIVA se $\exists\, t_0\in T$: $G \twoheadrightarrow T$, $g\mapsto g t_0$
  (ovvero se $\mathrm{Orb}(t_0)=T$)
- L'azione si dice LIBERA se $\forall t\in T$, $\mathrm{Stab}(t)=\{e\}$
- Definiamo dato $H<G$, $G/H := \{gH \mid g\in G\}$ classi laterali sx

Fissato $t_0\in T$, sia $H_0 = \mathrm{Stab}(t_0)$.

Allora: $G/H_0 \hookrightarrow T$, $gH_0 \mapsto g t_0$ è
- ben definita ($ght = gt$ per ogni $h\in H_0$)
- iniettiva

se $G \circlearrowright T$ è transitiva $\Rightarrow$ è una bigezione.

Inoltre $\mathrm{Stab}(g t_0) = g\,\mathrm{Stab}(t_0)\,g^{-1} = g H_0 g^{-1}$

TEO $p: E \to X$ rivestimento connesso per archi, $x \in X$. Allora

1. $e \in p^{-1}(x)$: $Stab_{\pi_1(X,x)}(e) = p_* \pi_1(E,e)$
2. $\pi_1(X,x) \circlearrowright p^{-1}(x)$ è TRANSITIVA : in particolare

In particolare: (i) $p^{-1}(x) \longleftrightarrow \pi_1(X,x) / p_* \pi_1(E,e)$

[segue da 1, 2 perché la AZIONE DX]

(ii) $Stab(e.[\alpha]) = [\alpha]^{-1} p_* \pi_1(E,e) [\alpha]$

Dim: 1. Vediamo: $p_* \pi_1(E,e) = \{[\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid e.[\alpha] = e\}$

$\subseteq$: Sia $[\alpha] \in p_* \pi_1(E,e)$, dunque $[\alpha] = [p\beta]$ con $\beta \in \Omega(E,e)$ ma allora:

$$e.[\alpha] = e.[p\beta] = (p\beta)_e(1) = \beta(1) = e \checkmark$$

$\supseteq$: Sia $[\alpha]$: $e.[\alpha] = e$ cioè $\alpha_e(1) = e \Rightarrow \alpha_e \in \Omega(E,e,e)$ ovvero $\alpha \in p_*(\pi_1(E,e))$. $p\alpha_e = \alpha$

2. Sia $f \in p^{-1}(x) \Rightarrow \alpha \in \Omega(E,e,f) \neq \emptyset$ per ip.
Ma allora $p\alpha \in \Omega(X,x,x)$ e abbiamo $e.[p\alpha] = \alpha(1) = f$
(ovvero $\forall f \in p^{-1}(x) \ \exists [p\alpha] \in \Omega(X,x)$: $e.[p\alpha] = f$)

es: $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\forall n > 1$ infatti: $p: S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rivestimento di grado 2 $(\circ)$

Poiché S^n è semplicemente connesso $(n>1)$

$\underset{\text{TEO}}{\Rightarrow} |\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))| = |p^{-1}(x)| \underset{(\circ)}{=} 2$

es: $\pi_1(S^1)$ è infinito numerabile: $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ rivestimento di deg numer.
$\mathbb{R}$ sempl. connesso $\Rightarrow |\pi_1(S^1)| = |\mathbb{Z}|$

- Consideriamo il caso in cui il rivestimento $p: E \to X$ sia ottenuto quozientando per l'AZIONE PROPR. DISCONTINUA di un gruppo $G \circlearrowright E$, ovvero $X = E/G$.

Per costruzione G agisce sulle fibre di p in modo transitivo
[le fibre sono le orbite di G]

Dunque abbiamo 2 azioni su $p^{-1}(x)$, $x \in X$

$$\begin{array}{ccc} G \times p^{-1}(x) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\ (g,e) & \mapsto & ge \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\ (e,[\alpha]) & \mapsto & e.[\alpha] \end{array}$$

[libera e transit.]

sono compatibili nel senso che $(g.e).[\alpha] = (g).(e.[\alpha])$

$p: E \longrightarrow X = E/G$ dove $G \circlearrowright E$ propriamente discontinua

$\Rightarrow$ Abbiamo 2 azioni sulle fibre di X:

$$G \times p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x) \quad \text{libera e transitiva}$$
$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x) \longrightarrow p^{-1}(x) \quad \text{monodromia}$$

<u>Oss</u>: Vale $\underset{\substack{\| \\ \tilde{\alpha}_{(g.e)}(1)}}{(g.e).[\alpha]} = \underset{\substack{\| \\ g.\tilde{\alpha}_e(1)}}{g.(e.[\alpha])}$ ovvero

Infatti: $g\tilde{\alpha}_e$ è un cammino in E di pt. iniziale ge ed inoltre $p(g\tilde{\alpha}_e) = \alpha$

$\rightarrow$ Unicità del sollevamento: $g\tilde{\alpha}_e = \tilde{\alpha}_{g.e}$

<u>TEO</u>: F un insieme con due azioni compatibili:

$$G \times F \longrightarrow F \quad \text{libera} \vee \text{transitiva (azione sx)}$$
$$F \times H \longrightarrow F \quad \text{(azione dx)}$$

e t.c. $(g.f).h \overset{\circ}{=} g.(f.h)$

Definiamo, fissato $e \in F$: $\theta_e : H \longrightarrow G$

$h \mapsto g$: $eh \in F \rightarrow \exists! g \in G : g.e = e.h$

$\Rightarrow$ θ_e è un OMOMORFISMO DI GRUPPI con $\ker \theta_e = \underbrace{Stab_H(e)}_{\text{quindi è } \triangleleft}$

se $H \circlearrowright F$ è transitiva: θ_e è SURGETTIVA e quindi:

$$G \simeq H/Stab_H(e)$$

[Nel nostro caso useremo $H = \pi_1(X,x)$, sappiamo che se X connesso per archi $\rightarrow$ azione transitiva : caratt. H]

<u>Dim</u>: - θ_e omomorfismo: $\theta_e(hk).e = e.(hk) = (e.h)k$
$= (\theta_e(h).e)k$
$\overset{\circ}{=} \theta_e(h)(e.k) =$
$= \theta_e(h)(\theta_e(k).e)$
$= (\theta_e(h)\theta_e(k)).e$

$\theta_e(hk) = \theta_e(h)\theta_e(k) \leftarrow G \circlearrowright E$ LIBERA

- $\ker(\theta_e) = Stab_e(H)$ (ovvio $G \circlearrowright E$ libera)

<u>Cor</u>: $p: E \rightarrow X$ rivestimento con $X = E/G$, $G \circlearrowright E$ prop. discontinua con E connesso per archi. Allora, $e_0 \in E$, $x_0 = p(e_0)$

① $p_* \pi_1(E, e_0) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$

② $G \simeq \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(E, e_0)$

Cor: $p: E \to X$ rivestimento con E semplicemente connesso, $X = E/_G$ [$G \circlearrowright E$ prop. discontin.]

$\Rightarrow$ $$G \simeq \pi_1(X, x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

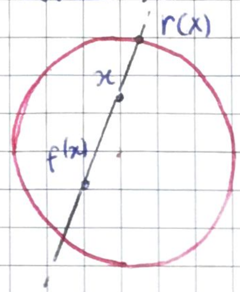
es: $\boxed{\pi_1(S_1) \simeq \mathbb{Z}}$

Conseguenza (Teorema pt. fisso di Brouwer)

• $f: D^2 \to D^2$ applicazione continua [$D^2 \subset \mathbb{R}^2$ disco chiuso]

$\Rightarrow \exists\, x \in D^2$ t.c. $f(x) = x$.

Dim: se $f(x) \neq x \ \forall x \in D^2 \Rightarrow$ possiamo definire una retrazione di D^2 su S^1



$$r: D^2 \longrightarrow S^1$$
$x \qquad r(x) =$ pt sulla retta $\overline{xf(x)}$ e su S^1 dal lato opposto rispetto a $f(x)$

- continua
- retrazione su S^1

$\Rightarrow i^*: \pi_1(S^1) \hookrightarrow \pi_1(D^2)$ iniettiva ma $\mathbb{Z} \not\hookrightarrow \{e\}$.

Oss: $p: E \to \overbrace{E/_G}^{X}$ rivestimento (con $G \circlearrowright E$ prop. discontinua)

allora $p_* \pi_1(E, e_0) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$ (E connesso per archi)

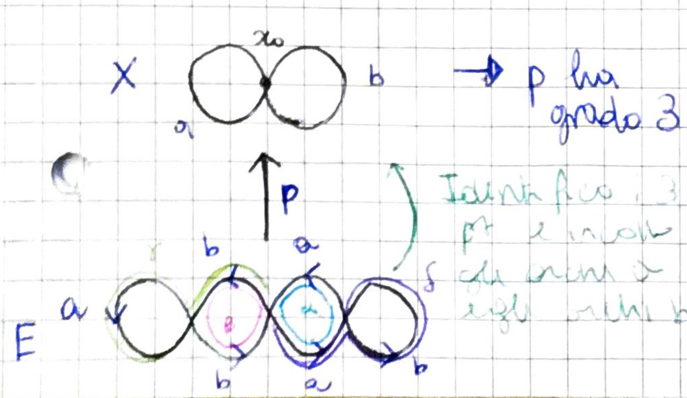
Se inoltre E è loc. connesso per archi allora

un riv. $q: E \to Y$ corrisponde ad un'azione prop. discontinua di un opportuno gruppo

SE E SOLO SE $q_* \pi_1(E, e_0) \triangleleft \pi_1(Y, q(e_0))$

Def: Un rivestimento $p: E \to X$ si dice regolare (E connesso per archi e localmente connesso per archi) se $p_* \pi_1(E, e_0) \triangleleft \pi_1(X, p(e_0))$ ← riv di Galois

ES: Trovare un rivestimento che non è ottenuto dall'azione di un gruppo.



$\to$ p ha grado 3.

$\pi_1(X, x_0) = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
$\pi_1(E, e_0) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p_* \pi_1(E, e_0) = \langle a^2, b^2, bab^{-1}, aba^{-1} \rangle \cap \langle a, b \rangle$

non è $\triangleleft$: $a, b \notin p_* \pi_1(E, e_0)$ ma bab^{-1}, aba^{-1} sì

- SOLLEVAMENTI di applicazioni continue qualsiasi

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Quand'è che esiste un sollevamento?
(*) E connesso, Y connesso e localmente connesso p.a.

Oss: se g esiste:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E, e_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "g_*"] \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd} \qquad f_* = p_* g_*$$

ovvero necessariamente $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

TEO (*) (∘) $\forall y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ e $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora

$\exists\, g$ sollevamento di f ad E, $g: Y \to E$ t.c. $g(y_0) = e_0$

$$\Updownarrow$$

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$$

Dim: $(\Leftarrow)$ Supp. valga $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Definiamo $g: Y \to E$
$y \mapsto (f\alpha)_{e_0}(1)$

Sia $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y) \Rightarrow f\alpha \in \Omega(X, x_0, f(y))$
$\Rightarrow (f\alpha)_{e_0} \in \Omega(E, e_0, e_1)$ con $e_1 = (f\alpha)_{e_0}(1)$

$pg(y) = p((f\alpha)_{e_0}(1)) = f(y)$ per def

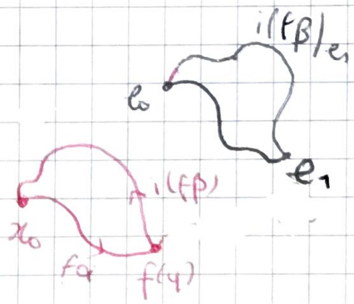
- Buona definizione

Siano $\alpha, \beta \in \Omega(Y, y_0, y)$: $f\alpha * i(f\beta) \in \Omega(X, x_0, x_0)$

$\Rightarrow [f\alpha * i(f\beta)] = f_*[\alpha * i(\beta)] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$
e quindi per ipotesi:

$f_*[\alpha * i(\beta)] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$

$\to (f\alpha * i(f\beta))_{e_0} \in \Omega(E, e_0, e_0)$



$\Rightarrow (f\beta)_{e_0}(1) = e_1 = (f\alpha)_{e_0}(1)$

- g continua $A \subset E$ aperto e sia $y \in g^{-1}(A)$

$$\begin{tikzcd} & E \supset V \ni g(y) \arrow[d, "p"] \\ y \in Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X \supset U \ni f(y) \end{tikzcd}$$

Sia $U \subset p(A)$: $f(y) \in U$ ap. banalmente rivestito e sia $g(y) \in V$ la componente aperta di $p^{-1}(U)$ che contiene $g(y)$.

$\to p|_V \; V \xrightarrow{\approx} U$ omeomorfismo

Sia $y \in W$ conn. per archi t.c. $f(W) \subset U$.

$$\begin{tikzcd} & & V \ni g(y) \arrow[d, "\approx\ p"] \\ & E \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "g"] & \\ y \in W \subset Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"] & X \supset U & f(y) \in U \end{tikzcd}$$

Vediamo che $W \subset g^{-1}(V)$:

sia $z \in W$, sia $\beta \in \Omega(W, y, z)$
$\alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$

$\Rightarrow \alpha * \beta \in \Omega(Y, y_0, z)$

quindi $g(z) = (f(\alpha * \beta))_{e_0}(1) = (f\alpha * f\beta)_{e_0}(1)$
$= (f\beta)_{\underbrace{\boxed{(f\alpha)_{e_0}(1)}}_{g(y)}}(1) = (f\beta)_{g(y)}(1) \in V$

Infatti:

$f\beta \in \Omega(f(W), f(y), f(z)) \subset \Omega(U, f(y), f(z))$

$(f\beta)_{g(y)} \in \Omega(\underbrace{p^{-1}(U)}_{= \bigsqcup V_i \text{ aperti disgiunti}}, g(y), g(z))$: $\Omega(V, g(y), g(z)) \ni (f\beta)_{g(y)}$ (connessione)

perché V è l'unica componente ~~conn~~ di $p^{-1}(U)$ contenente $g(y)$

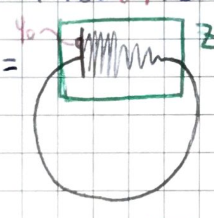
Cor $E \to X$ rivestimento connesso e $f: Y \to X$ con Y conn. per archi loc. connesso p.a.
Inoltre Y semplicemente connesso.
Allora: $y_0 \in Y$, $\forall e_0 \in p^{-1}(f(y_0))$ $\exists!\, g: Y \to E$ soll. di f tale che $g(y_0) = e_0$

Def: $p: E \to X$ rivestimento si dice universale se E è semplicemente connesso e localmente connesso per archi.

p corr. a $\exists$ prop. discontinua

es: $\mathbb{R} \to S^1$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $E \to E/G$

es [nel Teo (*) la loc connessione p.a. è necessaria] 03/25

$Y =$ 

è connesso ma non loc connesso per archi

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$Z := Y \cap \square$ è un chiuso, quindi $f: Y \to Y/Z \approx S^1$

(Abbiamo già visto) $\pi_1(Y, y_0) = 0$; quindi $f_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(\mathbb{R}, z_0)$

Vediamo che $\nexists\, g: Y \to \mathbb{R}$ sollevamento di f:
se f si solleva a Y con g t.c. $g(y_0) = 0$, avrei:

$f|(Y \setminus Z)$ iniettiva, $f(Y \setminus Z) = S^1 \setminus 1 \to f|_{Y \setminus Z}$ omeo
$\Rightarrow g|_{Y \setminus Z}$ deve essere iniettiva

quindi $g(Y \setminus Z)$ deve essere un intervallo connesso di ampiezza 2π con estremo in 0 $\to (0, 2\pi)$ o $(-2\pi, 0)$
ma quindi g non è cont.

Proprietà dei RICOPRIMENTI UNIVERSALI [loc conn p.a e sempl. connessi]

① $|\pi_1(X,x_0)| = |p^{-1}(x)|$ = grado del rivestimento

② Rivestimento universale unico a meno di omeomorfismi

<u>Dim</u>: Siano $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ rivestimenti universali, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in p_2^{-1}(p_1(e_1))$

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

sollevo p_1 con p_2 a $f : E_1 \to E_2$ con $f(e_1) = e_2$

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ E_2 \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

sollevo p_2 con p_1 a $g : E_2 \to E_1$ con $g(e_2) = e_1$

$\Rightarrow$ $gf : E_1 \to E_1$ t.c. $gf(e_1) = e_1$ e $p_1 gf = p_2 f = p_1$, quindi:

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, "p_1"] \\ E_1 \arrow[ur, "*"] \arrow[r, "p_1"'] & X \end{tikzcd}$$

e in $*$ posso mettere sia id che gf

→ per unicità del sollevamento $fg = id$, ovvero f è omeomorfismo t.c. $p_1 = p_2 f$.

→ possiamo considerare IL rivestimento universale di X.

③ PROP. UNIVERSALE DEL RIVESTIMENTO UNIVERSALE

$p : E \to X$ universale e $r : R \to X$ rivestimento connesso e loc connesso p.a.

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & R \arrow[d, "r"] \\ e_0 \in E \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

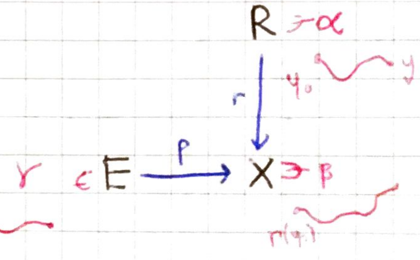
q si solleva (cioè $\exists$ q sollevamento di p t.c. $q(e_0) = y_0$)

$\Rightarrow$ q rivestimento universale

[$e_0 \in E$, $y_0 \in r^{-1}(p(e_0))$]

<u>Dim</u>. l'esistenza di q è data dalla teoria sui sollevamenti: vediamo che

① q è un <u>rivestimento</u>



- q <u>surgettivo</u>: $y \in R$, sia $\alpha \in \Omega(R, y_0, y)$

→ $\beta = r\alpha$ e $\alpha = \beta_{r(y_0)}$

Sia allora $\gamma = \beta_{e_0}$ soll di β a E: $\gamma(0) = y_0$

Allora $q\gamma : [0,1] \to R$ e $q\gamma(0) = q(e_0) = y_0$

e $r(q\gamma) = p\gamma = \beta$ → $q\gamma$ soll di β a R con pt iniziale y_0

Ma allora $q\gamma = \alpha$ per unicità, cioè $y \in \operatorname{Im} q$.

② q si banalizza: $y \in R$, $U \subset X$ banalizzante di $r(y)$ per r e per p connesso per archi.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "r"] & \supset r^{-1}(U) \ni y \in V \\ \{W_j\} \subset E \arrow[r, "p"] & X & \ni r(y) \in U \end{tikzcd}$$

$r^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$ componenti connesse ($V_i \approx U$) e sia V la componente connessa che contiene y.

$p^{-1}(U) = \bigsqcup W_j$ componenti connesse $\to q(W_j)$ connesso $\Rightarrow q(W_j) \subset V$ o $q(W_j) \cap V = \emptyset$

Allora $q^{-1}(V) = \bigsqcup W_{j_i}$ e

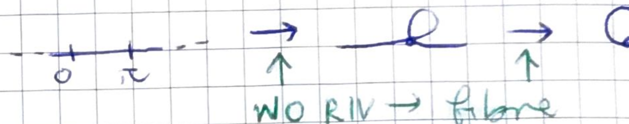
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "r", "\approx"'] \\ W_{j_i} \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "\approx"', "p"] & U \end{tikzcd}$$

$q|_{W_{j_i}}$ omeomorfismo.

⚠ Se non avessimo chiesto r rivestimento $\to$ in generale q, r non sono rivestimenti.

[vd es 12.24.1, loc connessi p archi e connessi]

ex: $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & R \arrow[r, "r"] & X \end{tikzcd}$$ con



Quando esiste il rivestimento universale?

Def: X è semilocalmente semplicemente connesso se

$\forall x \in X \ \exists U \ni x$ t.c. $i: U \hookrightarrow X \Rightarrow i_* \pi_1(U,x)$ banale

Oss: se $\exists$ rivestimento universale di X allora X è semiloc semplicemente connesso,

$\Rightarrow p: E \to X$ riv universale e U ap banalizzante $V \subset p^{-1}(U)$ t.c. $p: V \to U$ e q inversa

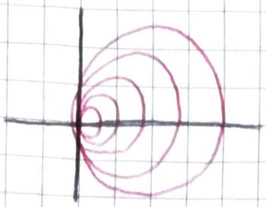
$$\to \begin{tikzcd} U \arrow[r, "q"] \arrow[rrr, bend right, "i"'] & V \arrow[r, hook, "i"] & E \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

e $i_*(\pi_1(U,x)) = p_*(i_*(q_*(\pi_1(U,x)))) \subset p_*(\pi_1(E, q(x)))$ che è banale

$\to i_*(\pi_1(U,x))$ banale

TEO X connesso e loc. connesso per archi. Allora

$\exists$ rivestimento universale di $X \iff X$ semilocalmente semplicemente connesso es



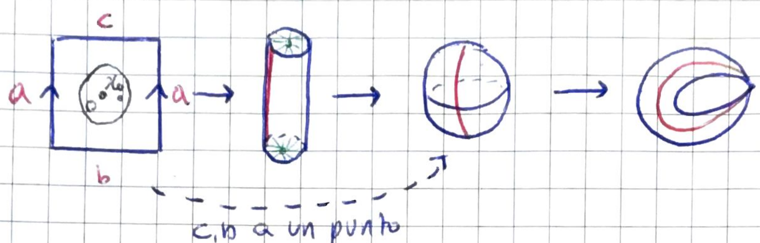
$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} C_n$ dove C_n è il cerchio di centro $(1/n, 0)$ e $r = 1/n$

è connesso, loc. connesso per archi

MA NON ~~semplicem~~ semilocalmente semplicemente connesso

es: $X = S^2 / \{N, S\}$:

Sol VK:



$A = X \setminus \{0\}$
$B =$ disco di centro 0 $\qquad x_0 \in A \cap B$

B è semplicemente connesso $\rightarrow \pi_1(X, x_0) \simeq \dfrac{\pi_1(A, x_0)}{i_*(\pi_1(A \cap B, x_0))}$

- via retrazione $\pi_1(A, x_0) \simeq \mathbb{Z} = \langle a \rangle$
$\pi_1(A, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ ma $i_*(\pi_1(A \cap B, x_0)) = \langle a a^{-1} \rangle =$

$\rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$

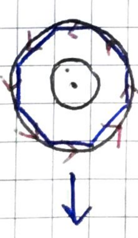
Sol RIC UNIV:

$\mathbb{Z} \circlearrowright E \quad n \cdot (x, y, z) = (x + 2n, y, z)$ prop. discontinua

$E/\mathbb{Z} \simeq X$ ed E semplicemente connesso

es: $D \subset \mathbb{C}$ disco di centro 0 e $P_n = D/\sim$ dove $z \sim w \Leftrightarrow \begin{cases} w = \xi_n^k z \\ |w| = |z| = 1 \end{cases}$

1.



P_n

$\pi_1(P_n, x) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$A = X \setminus \{0\}$
$B =$ disco di centro 0 $\qquad x_0 \in A \cap B$

$\rightarrow \pi_1(B, x_0) = 0$
$\pi_1(A, x_0) \simeq \mathbb{Z} = \langle a \rangle \quad \rightarrow \pi_1(X, n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

inoltre $\pi_1(A \cap B, x_0) = \langle a^n \rangle$

ultimo es

2. Calcolare il rivestimento universale $U_n \longrightarrow P_n$

$\underline{n=2}$. $P_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to U_2 = S^2$

In generale considero $U_n = \left(D \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)/_{\approx}$ dove $\approx$ appiccico i punti del bordo dei dischi

e $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \circlearrowright U_n$

$$\bar{m}.[z, \bar{k}] = [\xi_n^m z, \bar{m} + \bar{k}]$$

Mostriamo che $P_n \approx U_n/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ e che $U_n \to P_n$ univ

$U_n \to U_n/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ RIV UNIVERS

① $\underline{U_n \text{ semplicemente connesso}}$ (Induzione con VK)

② $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \circlearrowright U_n$ è propriamente discontinua.

$\forall x \in U_n, \exists x \in V$ t.c. $gV \cap V = \emptyset \quad \forall g \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$

Infatti:

- (a) $\forall$ aperto V che è interamente contenuto nella parte interna di uno degli n dischi $\to$ $\tilde{n}.V$ cambia disco $\to \tilde{n}V \cap V = \emptyset \quad \forall \tilde{n} \neq 0$.
- (b) Per i punti del bordo, basta prendere un aperto che non contenga 2 pt di distanza radice n-esima di 1.

③ $U_n/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \approx P_n$

Infatti, D_0 = Immagine di $D \times \{0\}$ in U_n è un dominio fondamentale per $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \circlearrowright U_n$ (da dim)

- D_0 chiuso
- la restrizione di $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \circlearrowright U_n$ a D_0 $\overset{(\approx)}{\vee}$ è quello che definisce P_n

$\Rightarrow D_0/_{\approx} = P_n$

Sennò vedo

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[r, hook, "\text{chiusa}"] \arrow[d] \arrow[dr] & U_n \arrow[d, "\text{chiusa}"] \\
D_0/_{\approx} \arrow[r, "*"'] & U_n/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

omeomorfismo

*: surg. perché D_0 interseca tutte le orbite

bij: è continua iniettiva per def

chiusa

$\to P_n \approx D_0/_{\approx} \approx U_n/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

es: X Hausdorff con rivestimento universale compatto. Allora ogni ~~[illegible]~~ applicazione $f: X \to S^1$ continua è omotopa all'applicazione costante

Oss: $p: E \to X$ universale con E cmpt, allora X è connesso e compatto

- $|p^{-1}(x)| = |\pi_1(X,x)|$
- $p^{-1}(x)$ discreto in E
- x chiuso in X (X T2), $p^{-1}(x)$ chiuso in $E \to p^{-1}(x)$ cmpt $\Big\}\ |p^{-1}(x)| < +\infty$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "g"] & S^1 \end{tikzcd}$$

f si solleva a $\mathbb{R} \iff f_*(\pi_1(X,x)) \subset \underbrace{q_*(\pi_1(\mathbb{R},e_0))}_{=0}$
con $f(x_0) = e_0$

Ora $f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(S^1,x_0) \simeq \mathbb{Z}$ e $\pi_1(X,x_0)$ è finito
$\to f_*(\pi_1(X,x_0)) < \mathbb{Z}$ finito

$\Rightarrow f_*(\pi_1(X,x_0)) = 0$

$\to f$ si solleva a $\mathbb{R}$ ~~$\Rightarrow$~~ $g: X \to \mathbb{R}$

Vediamo g è omotopa a una costante, infatti $g(X) = [a,b]$

$\to G(x,t) = t\,g(x) + (1-t)a$ è omotopia fra g e $1a$

Allora $F(x,t) = q(G(x,t))$ è omotopia fra $qg = f$ e qa costante

③ ANALISI COMPLESSA

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ con U aperto di $\mathbb{C}$

CONTINUITÀ

Oss: come sp topologico $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$: continuità di $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$
$\equiv$ continuità di $f: U \to \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$

dove $f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + \mathrm{Im}(f(z))$ allora $z = x + iy$

$\to f: U \to \mathbb{R}^2 \cdot f(x,y) = (\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy)))$
$= (u(x,y), v(x,y))$.

Ovvero f continua $U \to \mathbb{R}^2$ se e solo se $u, v: U \to \mathbb{R}$ sono continue

Analogamente possiamo ~~dire che~~ parlare di differenziabilità di $f: U \to \mathbb{C}$ nel senso reale

Def: f è differenziabile in $z_0 \in U$ nel senso reale se $\exists\, A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineare, tale che

$A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ $$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + r(z) \quad \text{con} \quad \frac{r(z)}{\|z\|} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

e $A = J_f(z_0)$ è lo Jacobiano di f

$$f \text{ differenziabile in } z_0 \Rightarrow J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & , \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) & , \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

E diciamo che f è differenziabile in U se lo è in ogni $z \in U$.

TEO [Differenziale totale]
Data $f: U \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$ se $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ esistono continue in z_0
$\Rightarrow f$ differenziabile.

Def: $f: U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ allora f è differenziabile (in senso complesso) o equiv. è olomorfa in z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ esiste in } \mathbb{C}$$ (se $\exists$ lo indichiamo $f'(z_0)$)

Diremo che f è olomorfa in U se lo è in ogni $z_0 \in U$.

ANTICIPAZIONE: f olomorfa in U, allora come funzione reale f è C^∞ in U ed è analitica

ex: 1) $f(z) = z$ olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, $f'(z) = 1$

Def: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe in tutto $\mathbb{C}$ è detta intera

2) $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfe in nessun punto:

$\exists ? \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$: prendiamo $z = z_0 + tw$, $w \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{t \to 0} \frac{\bar{z}_0 + t\bar{w} - \bar{z}_0}{z_0 + tw - z_0} = \frac{\bar{w}}{w}$ e quindi dipende da w
$\to$ arbitrario numero di norma 1

Oss: f olomorfa in z_0 $\Rightarrow$ f continua in z_0.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0) = \underbrace{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\lim_{z\to z_0} z-z_0}_{\to 0} = 0$$

Prop: $U\subset\mathbb{C}$ aperto, $f: U\to\mathbb{C}$, $z_0\in U$. Allora sono equivalenti

1. f olomorfa in z_0 con $f'(z_0)=a$
2. $\exists\, \varphi: U\to\mathbb{C}$ continua in z_0 con $\varphi(z_0)=a$ t.c.

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z-z_0) \qquad \left(\varphi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ esteso a } z_0 \text{ per continuità}\right)$$

3. $\exists\, \psi: U\to\mathbb{C}$ continua in z_0 con $\psi(z_0)=0$ t.c.

$$f(z) = f(z_0) + a(z-z_0) + \psi(z) \qquad (\psi(z) = \varphi(z)-a|z-z_0)$$

4. Detta $r(z) = f(z)-f(z_0)-a(z-z_0)$ allora r è continua in z_0 e vale $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{r(z)}{|z-z_0|}=0$

Analogamente al caso reale si mostrano le regole di derivazione:

Prop: $U\subset\mathbb{C}$, $f,g: U\to\mathbb{C}$ olomorfe in z_0: $f+g$, fg, λf ($\lambda\in\mathbb{C}$), $\frac{1}{f}$ ($f(z)\neq 0$) sono olomorfe in z_0 e valgono le stesse relazioni sulle derivate in uno var:

- $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$
- $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)+g'(z_0)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'}{f^2}(z_0)$

Prop: $f: U\to\mathbb{C}$ olomorfa in z_0, $g: V\to\mathbb{C}$ con $f(U)\subset V$ olomorfa in $f(z_0)$

$\Rightarrow$ $g\circ f$ olomorfa in z_0 e $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$

Es: le funzioni polinomiali $f(z)\in\mathbb{C}[z]$ sono olomorfe.
Similmente $\frac{f(z)}{g(z)}\in\mathbb{C}(z)$ funzioni razionali sono olomorfe

04/01

Def: $U\subset\mathbb{C}$ aperto e $f: U\to\mathbb{C}$ allora f olomorfa in U se $\forall z_0\in U$, $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ esiste in $\mathbb{C}$.

esempi: 1- $f(z)=e^z$, $f(z)=\log_k(z)$

2- Più in generale definiremo le funzioni trigonometriche complesse.

Oss: $\{f \text{ olomorfe } U\to\mathbb{C}\} \subset \{f \text{ differenziabili } U\to\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2\}$

Problema: caratterizzare le funzioni olomorfe all'interno di quelle differenziabili

- f olomorfa in z_0 $\iff$ $f(z)-f(z_0) = a(z-z_0)+r(z)$: $\lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{|z-z_0|} = 0$
- f differenziabile in z_0 $\iff$ $\exists A \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ $f(z)-f(z_0) = A(z-z_0)+r(z)$

Oss: l'applicazione $\phi_a(z) = a \cdot z \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, quindi

CAR1: f olomorfa in z_0 con $f'(z_0)=a$ $\iff$ f differenziabile in z_0 con $Jf(z_0)$ = molt per $a\in\mathbb{C}$ e quindi $f'(z_0)=a$.

Prop: Sia $A: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lineare su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R}+i\mathbb{R}$) allora sono equivalenti

1) A è $\mathbb{C}$-lineare
2) A indotta dalla moltiplicazione per un complesso
3) $A(i) = iA(1)$
4) A è della forma $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ [A molt per $\alpha+i\beta$]

Dim: 1) $\iff$ 2) definizione, 1) $\Rightarrow$ 3) ovvio
3) $\Rightarrow$ 1): mostriamo A lineare su $\mathbb{C}$: $A(z_1+z_2) = A(z_1)+A(z_2)$ per $\mathbb{R}$-linearità.

$$A(x+iy) = A(x)+A(iy) = xA(1)+iyA(1) = (x+iy)A(1)$$

$$\Rightarrow A(\lambda z) = \lambda z A(1) = \lambda A(z) \quad \forall \lambda\in\mathbb{C} \to \text{è } \mathbb{C}\text{-lineare.}$$

2) $\iff$ 4): se $A(z) = (\alpha+i\beta)z$ è $\mathbb{R}$-lineare e rappresentata da

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A(1) &= \alpha+i\beta \\ A(i) &= -\beta+i\alpha \end{aligned}$$

Teo (Cauchy-Riemann) $f: U\to\mathbb{C}$ è olomorfa in z_0 ($f = u+iv$)

$\Updownarrow$

f differenziabile in z_0 e valgono
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases} \quad (*)$$

Dim: Basta far vedere che le equazioni sono equivalenti a dire $J_f(z_0)$ = molt per $a\in\mathbb{C}$ $\to$ $a = f'(z_0)$.

Ma
$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$
e per la caratterizzazione in Prop ↑, vale:

e $J_f(z_0)$ = molt per $a\in\mathbb{C}$ $\iff$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ che sono $(*)$

In questo caso $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$

Oss: se poniamo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ allora $(*) \to \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$

es1 $f(z) = e^z$ olomorfa in $\mathbb{C}$ con $f'(z) = e^z$

In questo caso $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$

ovvero $\begin{cases} u(z) = u(x+iy) = e^x \cos(y) \\ v(z) = v(x+iy) = + e^x \sin(y) \end{cases}$

Allora: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) \text{ e } \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) \text{ e } \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y) \end{cases}$ e rispetto le EQUAZIONI DI CR (*)

Quindi e^z è olomorfa e $f'(z_0) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^{z_0}$

es2: Funzioni trigonometriche complesse e iperboliche complesse

Poniamo $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

e $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

- sono olomorfe (comb lineari di e^z olomorfe)
- estendono le rispettive funzioni reali
- valgono ancora le identità che valgono sui reali

Oss: $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa allora

$$\boxed{J_f(z_0) = 0 \iff f'(z_0) = 0 \iff \det(J_f(z_0)) = 0}$$

Infatti per C-R vale $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$ e $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

e $|J_f(z_0)| = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ e quindi tutte e tre le condizioni sono vere se e solo se $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Cor: Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa con U connesso. Allora sono equivalenti:

1. f costante su U
2. f' identicamente nullo su U
3. $Re(f)$ costante su U
4. $Im(f)$ costante su U

Dim:
- f costante $\iff J_f \equiv 0$ su $U \iff f' \equiv 0$ su U $(1 \iff 2)$
- $1 \Rightarrow 3, 4$ ovvio
- $3 \Rightarrow 1$: $u = Re(f)$ costante allora $v = Im(f)$ soddisfa (CR) $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow v = Im(f)$ è costante
- $4 \Rightarrow 1$ come sopra.

Per dimostrare che i logaritmi sono olomorfi dimostriamo prima:

con $f \in C^1(D)$ (·)

* TEO [f^{ne} inversa] Sia $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa e sia $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$
Allora esiste $U \ni z_0$ intorno aperto di z_0, $V \ni f(z_0)$ aperto contenente $f(z_0)$, tale che

1. $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$
2. $f|_U : U \to V$ invertibile con inversa olomorfa $g: V \to U$

Inoltre vale $g'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in U$

Dim: $J_f(z) = 0 \iff f'(z) = 0 \iff \det J_f(z) = 0$ e quindi possiamo usare il teorema della funzione inversa per f^{ne} differenziabili. Troviamo U, V come nel teorema t.c.

$f: U \to V$ invertibile con $g: V \to U$ differenziabile

e che soddisfa $J_g(f(z)) = (J_f(z))^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, bend left, "J_f(z)"] & \mathbb{C} \arrow[l, bend left, "J_g(f(z))"] \end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che g è OLOMORFA:

- per ipotesi $J_f(z)$ = molt. per $f'(z)$
- $J_g(f(z))$ è la moltiplicazione per $(f'(z))^{-1} \in \mathbb{C} \to g$ olomorfa con la derivata dell'enunciato

Es 3: $f(z) = e^z$ olomorfa con $f'(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, quindi possiamo applicare il teorema della funzione inversa. ($\in C^1(\mathbb{C})$)

→ f è localmente invertibile con inverse locali

$$\mathrm{Log}_k : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}\, e^{ik\pi} \longrightarrow (k\pi, (k+1)\pi)$$

e quindi detta $g(z) = \mathrm{Log}_k(z)$ vale $g'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)}$: $g'(z) = \dfrac{1}{z}$.

- FUNZIONI OLOMORFE E FUNZIONI ARMONICHE

Laplaciano: $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Def: u funzione $u: U \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(U)$ è armonica se $\Delta u \equiv 0$

Sia f olomorfa, $f \in C^2(U)$ (·) con $f = u + iv$, allora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \overset{CR}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \overset{CR}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow Re(u) \text{ armonica}$$

Teo: $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa, $f \in C^2(U)$ (·) con $f = u + iv$, allora u e v armoniche

(Le ipotesi (·) sono superflue in realtà)

Data $f = u + iv$ olomorfa: v è la coniugata armonica di u

TEO: Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e $u: D \to \mathbb{R}$ armonica ($u \in C^2(\mathbb{R})$)
Allora esiste:
$$f: D \to \mathbb{C} \text{ olomorfa con } u = Re(f)$$
e f è univocamente determinato a meno di molt. per i.

Dim: Stiamo cercando $v: D \to \mathbb{R}$ soluzione delle equazioni di CR
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) \end{cases}$$
ovvero stiamo cercando una primitiva per la 1-forma
$$w = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \text{a coef in } C^1(D)$$
$\Rightarrow$ W ESATTA se e solo se W CHIUSA (D sempl connesso)

È chiusa? Basta vedere che $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ che è vero perchè u è chiusa

Quindi esiste v univocamente determinato a meno di cost.

es: Sia $u(x,y) = +\log\sqrt{x^2+y^2}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv \mathbb{C}^*$
Vediamo che $u \in C^2(\mathbb{C}^*)$ ed è armonica:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
e l'altro è simmetrico $\to$ u è armonica su $\boxed{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$ non sempl. connesso

Supponiamo $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa con $Re(f) = u$, allora
$$Re(f)(z) = u(z) = \log|z| = Re(Log(z)) \text{ su } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$
Ma quindi per unicità $f \equiv Log(z)$ a meno di molt per i su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$
e questo è assurdo perchè f è definita in tutto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
dovremmo avere che Log è continua su $\mathbb{C} - \{0\}$ che è falso.

* FORME DIFFERENZIALI A VALORI COMPLESSI

04/03

Def. Una (1-) forma differenziale complessa su D (aperto di $\mathbb{C}$) è un'espressione

$$\omega = P(x,y)\,d\ \ + Q(x,y)\,dy$$

dove $P, Q \;\; D \to \mathbb{C}$ continue

Oss. Consideriamo $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ è un sp vett di dimensione 2 su $\mathbb{C}$
Infatti detti

$$dx\,(a+ib) = a \qquad dy\,(a+ib) = b$$

(proiezioni nella I° e II° coordinata)

$\Rightarrow \{dx, dy\}$ base di $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$

i) $\varphi \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \Rightarrow \varphi(a+ib) = a\varphi(1) + b\varphi(i) =$
$= \underset{\mathbb{C}}{\underset{\Uparrow}{\varphi(1)}}\,dx(a+ib) + \underset{\mathbb{C}}{\underset{\Uparrow}{\varphi(i)}}\,dy(a+ib)$

combin lineare di dx, dy
a coeff in $\mathbb{C}$

ii) dx, dy indipendenti: $\underbrace{a\,dx + b\,dy}_{\varphi} = 0$

$\rightarrow \varphi(1) = a = 0$, $\varphi(i) = b = 0 \;\rightarrow\; a = b = 0$ ✓

Oss $dz := dx + i\,dy$ e $d\bar{z} = dx - i\,dy$ allora anche $\{dz, d\bar{z}\}$ è una base

Def 2 Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto: allora una 1-forma differenziale su $\mathbb{C}$ è un'applicazione continua

$$\omega : U \longrightarrow End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$$

Quindi possiamo scrivere in base:

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad \text{o} \quad \omega = \tilde{P}(x,y)\,dz + \tilde{Q}(x,y)\,d\bar{z}$$

Data $f : D \to \mathbb{C}$ (differenziabile dal punto di vista reale) possiamo associargli una forma differenziale complessa.

Se $f(x\ \ ) = u(x+iy) + i\,v(x+iy) \Longrightarrow df = du + i\,dv$

ovvero troviamo la forma differenziale:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy$$

Oss $d : f \to df$ è lineare infatti $d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\,df_1 + \lambda_2\,df_2$

Determiniamo i coefficienti di df rispetto a $\{dz, d\bar{z}\}$

$$\begin{cases} dz = dx + i\,dy \\ d\bar{z} = dx - i\,dy \end{cases} \to \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

Quindi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}$$

$\Rightarrow$ possiamo definire $\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial z} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

Ora: f olomorfa $\Leftrightarrow$ valgono le EQ di CR $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

ovvero $\boxed{f \text{ olomorfa} \Leftrightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz \Leftrightarrow df \text{ proporzionale a } dz \text{ ovvero } df = f'(z)\,dz}$

Def: Sia w forma differenziale a valori complessi su $D \subset \mathbb{C}$

1. w è esatta se $w = df$ $\exists f: D \to \mathbb{C}$ differenziabile
2. w è chiusa se localmente in D ammette primitiva
   $\forall z_0 \in D$, $\exists z_0 \in U$ t.c. $w|_U$ è esatta

- Raccordo con Analisi 2

w forma diff. su D: $w = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ $\quad P, Q: D \to \mathbb{C}$

definiamo $\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(P)\,dx + \mathrm{Re}(Q)\,dy \\ \mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(P)\,dx + \mathrm{Im}(Q)\,dy \end{cases}$ sono FORME DIFF. REALI

Oss 1: w è esatta se e solo se $\mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(w)$ sono esatte

Oss 2: Se P, Q funzioni $C^1(D)$ allora:

$$w \text{ chiusa} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Infatti: w chiusa

$\Updownarrow$

w loc. esatta $\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in D$ $\exists r > 0$: $D_r(z_0) \subset D$ e $w|_{D_r(z_0)}$ è esatta

$$\underset{\text{AM2 + oss 1}}{\Leftrightarrow} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ in } D_r(z_0) \text{ (sempl. connesso)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ in } D.$$

Vogliamo dimostrare il seguente teorema:

* TEOREMA [di Cauchy]

$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa allora $f(z)dz$ è forma diff CHIUSA in D.

<u>Caso</u>: f olomorfa + $C^1(D)$

<u>Dim</u>: $f \in C^1(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue e

$$f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy = (u(z)dx + iv(z)dy) + i(u(z)dx + v(z)dy)$$

E per (Oss 2) $f(z)dz$ chiusa $\Leftrightarrow Re(fdz), Im(fdz)$ chiuse

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow CR$$

<u>Def</u>. $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ continua $f(x) = u(x) + iv(x)$. Allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Lemma: $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

<u>Dim</u>: $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.
Assumiamo $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$. Allora

$$Re\left(\alpha \int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b Re(\alpha f(t))\,dt \leq \int_a^b |Re(\alpha f(t))|$$
$$\leq \int_a^b |\alpha f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

e per $\alpha = \frac{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|}{\int_a^b f(t)\,dt}$ ho la tesi.

<u>Def</u>: Sia w forma differenziale su $D \subset \mathbb{C}$ e $\gamma: [a,b] \to D$ curva C^1
dove $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Allora

$$\int_\gamma w = \int_a^b P(\gamma(t))\,x'(t)\,dt + \int_a^b Q(\gamma(t))\,y'(t)\,dt$$

(va bene anche se γ C^1 a tratti)

<u>Oss</u>: $\int_\gamma w = \int_\gamma Re(w) + i\int_\gamma Im(w)$

TEO [da AM2] ⚠ non serve che abbia i coeff C^1

[w forma differenziale] su D è esatta se e solo se

$\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tratti in D vale $\int_\gamma w = 0$

Cor: w forma diff su D è chiusa $\iff$ $\forall z_0 \; \exists \; D_r(z_0) \subset D$ t.c. $\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tr in $D_r(z_0)$ $\int_\gamma w = 0$

equivale per TEO a chiusa ⇔ loc. esatta

Oss: $f: D \to \mathbb{C}$ continua; $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ curva C^1, allora

$$\int_\gamma \underbrace{f(z)\,dz}_{\text{forma diff}} = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Infatti per def: $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(f(z)\,dx + i f(z)\,dy \right) =$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,x'(t)\,dt + i \int_a^b f(\gamma(t))\,y'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,(x'(t) + i y'(t))\,dt$$

es: Consideriamo "$\overset{w}{\frac{dz}{z}}$" su $\mathbb{C}^*$

1. w è chiusa: ha come primitiva locale $\operatorname{Log}_k(z)$
2. w NON È ESATTA: sia $\gamma_k : [0, 2\pi k] \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto e^{it}$ (gira k volte S¹)

$$\Rightarrow \int_{\gamma_k} w = \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = \int_0^{2k\pi} \frac{i\,\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}}\,dt = i \cdot 2k\pi \neq 0 \quad \forall k \neq 0$$

e quindi per il TEO ↑ w non è esatta

es (∘): Consideriamo $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$[\gamma] \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

ben definito: $\int_\gamma w$ dip solo da $[\gamma]$

Mostrare che l'applicazione definisce un ISOMORFISMO DI GRP.

<u>Da AM2</u>: (sotto hp C^1): Sia w forma diff a coef C^1 su $D \subset \mathbb{C}$
Allora $\int_\gamma w$ dipende solo da $[\gamma]$ cl. di omotopia di γ

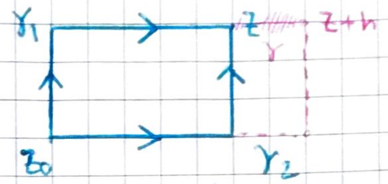
<u>Cor</u>: (sotto hp C^1): D sempl. connesso $\Rightarrow$ w chiusa $\Leftrightarrow$ esatta

<u>Oss</u>: tutto vale anche senza le ipotesi C^1.

<u>Prop</u>: Sia D un disco centrato in $z_0 \in \mathbb{C}$ e w forma diff su D con coef. continui
Allora:

$$w \text{ è esatta} \Leftrightarrow \int_{\partial R} w = 0$$ dove R è un qualsiasi rett. con lati paralleli agli assi

<u>Dim</u>: ($\Rightarrow$) già visto



($\Leftarrow$) Dato $z \in D$ sia R_z

→ per ip: $\int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$ perché $\int_{\partial R} w = 0$

Definiamo $F(z) = \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$ e vediamo $dF = w$

- $h \in \mathbb{R}$ t.c. $z+h \in D$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_\gamma w = \frac{1}{h} \int_0^h P(\gamma(t))\, x'(t)\, dt + \cancel{\int_0^h Q(\gamma(t))\, y'(t)\, dt}$$

$z = x+iy$ e $\gamma(t) = (t, y)$ $\forall t \in (x, x+h)$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t,y)\, dt \xrightarrow[h \to 0]{} P(x,y)$$ per il TEO del calcolo integrale

Ovvero F ammette $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$

- Analogamente si dimostra $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

} continue per ip.

$\Rightarrow$ (TEO del DIFF. TOTALE) F differenziabile e vale

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = w$$

<u>Cor</u> w forma diff su D è chiusa $\Leftrightarrow$ $\forall z_0 \in D$ $\exists D_r(z_0) \subset D$ t.c. $\int_{\partial R} w = 0$ $\forall R \subset D_r(z_0)$ rett. con lati // agli assi